X2016 – PC 1

RAPPELS : théorie des ensembles

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

1 Opérations sur les ensembles

Soit E un ensemble non vide.

Sous-ensembles. On écrit $A \subset E$ et on dit que A est un sous-ensemble de E si pour tout $x \in A$, on a $x \in E$.

Complémentaire. Si $A \subset E$, on note $\overline{A} = \{x \in E : x \notin A\}$ le complémentaire de A dans E ($\overline{A}$ est un ensemble consitué des éléments de E qui ne sont pas dans A). Si $A \subset B$, on note $B \backslash A$ les éléments de B qui n'appartiennent pas à A. Alors $B \backslash A = B \cap \overline{A}$.

Union. Soit I un ensemble quelconque (on voit I comme un ensemble d'indices), et soit $(A_i)_{i \in I}$ une collection de sous-ensembles de E. Alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ désigne le sous-ensemble de E formé des éléments x tels qu'il existe $i \in I$ avec $x \in A_i$.

Intersection. Soit I un ensemble quelconque (on voit I comme un ensemble d'indices), et soit $(A_i)_{i \in I}$ une collection de sous-ensembles de E. Alors $\bigcap_{i \in I} A_i$ désigne le sous-ensemble de E formé des éléments x tels que pour tout $i \in I$ on a $x \in A_i$.

Unions, intersections et complémentaires. Soit I un ensemble quelconque (on voit I comme un ensemble d'indices), et soit $(A_i)_{i \in I}$ une collection de sous-ensembles de E. On rappelle que :

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}, \qquad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}.$$

Égalité de deux ensembles. Si A et B sont deux ensembles, pour montrer que $A = B$, on raisonne très souvent par double inclusion, en montrant que si $x \in A$, alors $x \in B$, puis que si $x \in B$, alors $x \in A$.

Ensemble des parties. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E (aussi appelé l'ensemble des parties de E).

Produit cartésien d'ensembles. Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des ensembles, on note $E_1 \times \cdots \times E_n$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n$. Si I est un ensemble, on note E^I l'ensemble des applications de I dans E. Un élément de E^I est usuellement note $(e_i)_{i \in I}$.

2 Image directe, image réciproque

Soient X et Y deux ensembles. Soit $f : X \to Y$ une application.

($*$) **Image directe.** Si $A \subset X$ est un sous-ensemble de X, on note $f(A)$ le **sous-ensemble** de Y défini par

$$f(A) = \{y \in Y : \text{il existe } x \in A \text{ tel que } y = f(x)\}.$$

On écrit parfois $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$.

($*$) **Image réciproque.** Si $B \subset Y$ est un sous-ensemble de Y, on note $f^{-1}(B)$ le **sous-ensemble** de X défini par

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

On a $f(x) \in B$ si et seulement $x \in f^{-1}(B)$. On a $f(A) \subset B$ si et seulement si $A \subset f^{-1}(B)$.

ATTENTION. Si $y \in Y$, la notation $f^{-1}(y)$ n'a pas toujours un sens (sauf si f est injective), alors que $f^{-1}(\{y\})$ si. En revanche, si $x \in X$, $f(x)$ a toujours en sens (c'est un élément de Y), de même que $f(\{x\})$ (qui est un sous-ensemble de Y qui est $\{f(x)\}$).

($*$) **Composition d'images réciproques.** Soient X, Y, Z des ensembles et $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ des applications. Alors pour tout sous-ensemble $B \subset Z$ de Z on a

$$(f \circ g)^{-1}(B) = g^{-1}(f^{-1}(B)),$$

qui sont des sous-ensembles de X.

3 = 1+2

Soit $f : X \to Y$ une application. Soit I un ensemble quelconque (on voit I comme un ensemble d'indices), soit $(A_i)_{i \in I}$ une collection de sous-ensembles de X et soit $(B_i)_{i \in I}$ une collection de sous-ensembles de Y. Alors

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$

et

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i), \qquad \boxed{f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)}.$$

De plus, si $A \subset B \subset Y$, on a $f^{-1}(B \backslash A) = f^{-1}(B) \backslash f^{-1}(A)$.

ATTENTION. Il n'est pas vrai en général que $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$ (trouvez un contre-exemple !)

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail.