X2016 – PC 1

RAPPELS : espaces probabilisés (chap 2 du poly)

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

$*$ **Espaces probabilisés.** $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé (on dit aussi parfois espace de probabilité) si $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et $\mathbb{P}$ est une probabilité (on dit aussi parfois *mesure de probabilité*) sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

$*$ **Tribu.** Un ensemble $\mathcal{A}$ de sous-ensembles de Ω ($\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$) est une tribu sur Ω si :

(1) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(2) Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $\overline{A} = \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$.

(3) Pour toute suite $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{A}$.

On dit que les éléments de $\mathcal{A}$ sont les *événements*.

ATTENTION. Un événement est **toujours** un sous-ensemble de Ω.

$*$ **Probabilité.** Une probabilité $\mathbb{P}$ est une

$$\textbf{application} \quad \mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$$

telle que

(1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(2) Pour toute suite $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

La modélisation probabiliste consiste à décrire une expérience a priori aléatoire par la donnée d'un espace probabilisé.

$*$ **Indépendance.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit I un ensemble. Des événements $(A_i)_{i \in I}$ sont indépendants (sous-entendu **mutuellement** et relativement à $\mathbb{P}$) si pour tout nombre fini d'indices $i_1, i_2, \ldots, i_n$ on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq k \leq n} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Ou encore, écrit autrement, $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_n}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_n})$.

ATTENTION. La notion d'indépendance d'une suite d'événements est très forte : elle fait intervenir beaucoup de conditions d'égalités (une pour chaque sous-ensemble fini de I).

$*$ **Les règles du jeu.**

(a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

(b) Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

(c) Si $A, B \in \mathcal{A}$ et $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.

(d) Si $A, B \in \mathcal{A}$, on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ (généralisation : formule du crible).

$*$ **Du fini à l'infini.** Soit $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

(e) On a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$.

(f) **(Union croissante)** Si (A_n) est **croissante pour l'inclusion** (càd $A_k \subset A_{k+1}$ pour tout $k \geq 0$), alors $\mathbb{P}(A_n) \to \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right)$ quand $n \to \infty$.

(g) **(Intersection décroissante)** Si (A_n) est **décroissante pour l'inclusion** (càd $A_{k+1} \subset A_k$ pour tout $k \geq 0$), alors $\mathbb{P}(A_n) \to \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 0} A_n\right)$ quand $n \to \infty$.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail.

X2016 – PC 1

RAPPELS : dictionnaire entre vocabulaire ensembliste et probabiliste

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On considère $A, B \in \mathcal{A}$ et $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$ des événements.

Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire des probas/modélisation
	L'ensemble des événements
	Univers / événement certain
	Issue / réalisation / résultat possible / aléa
	A est réalisé (par l'issue ω)
	Événement impossible - jamais réalisé
	Événement « A ou B est réalisé »
	Événement « Au moins l'un des A_i est réalisé »
	Événement « A et B sont réalisés »
	Événement « Tous les A_i sont réalisés »
	Événement contraire de A / A n'est pas réalisé
	A et B sont incompatibles
	Implication : si A est réalisé, alors B l'est
	A est presque sûr / presque sûrement A est réalisé
	A est négligeable
	Quelque chose d'aléatoire

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail.