Projet de simulation MAP311 – X2015

Quelle est la longueur d'un pont de marche aléatoire ?

Sujet proposé par Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$ et dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X = i) = 1/2^{i+2}$ pour tout $i \geq -1$. Soient $(X_k)_{k\geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que X (toutes définies sur le même espace de probabilité). On pose $W_0 = 0$ et $W_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \geq 1$. La suite $(W_n)_{n\geq 0}$ est appelée *marche aléatoire* de loi de saut celle de X. Sa *longueur* à l'instant $n \geq 1$ est définie comme étant la quantité

$$L_n = |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n|.$$

Soit $\widehat{L}_n$ une variable aléatoire dont la loi est celle de L_n conditionnellement à $\{W_n = 0\}$ (ainsi $\mathbb{P}(\widehat{L}_n = k) = \mathbb{P}(L_n = k | W_n = 0)$ pour tout $k \geq 0$), appelée *longueur du pont de la marche aléatoire* à l'instant n. Le but de ce projet est d'étudier le comportement de $\widehat{L}_n$ lorsque $n \to \infty$.

Les questions **T** sont théoriques, les questions **S** relèvent de la simulation.

(1,**T**) Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[|X|]$.

(2,**T**) Montrer que L_n/n converge presque sûrement vers 1 lorsque $n \to \infty$. Montrer que $(L_n - n)/\sqrt{n}$ converge en loi lorsque $n \to \infty$ vers une variable aléatoire gaussienne centrée et dont on calculera la variance.

(3,**S**) Illustrer à l'aide de simulations la convergence en loi de la question précédente. Étudier à l'aide de simulations si cette convergence a lieu presque sûrement.

(4,**T**) Calculer $\mathbb{E}[L_n]$. Calculer $\mathbb{E}[e^{\lambda L_n}]$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $c > 0$ tel que pour tout n assez grand on ait

$$\mathbb{P}(L_n \geq (1 + \varepsilon)n) \leq e^{-cn}.$$

Dans la suite, $\alpha \in \mathbb{R}$ est un nombre réel fixé.

(5,**T**) Montrer que lorsque $n \to \infty$, $\mathbb{P}(W_n > \alpha\sqrt{n})$ converge vers un nombre réel strictement positif dont on donnera une expression.

(6,**T**) Soit $L_n^{(\alpha)}$ une variable aléatoire dont la loi est L_n conditionnellement à $\{W_n > \alpha\sqrt{n}\}$ (ainsi $\mathbb{P}(L_n^{(\alpha)} = k) = \mathbb{P}(L_n = k | W_n > \alpha\sqrt{n})$ pour tout $k \geq 0$). Montrer que $L_n^{(\alpha)}/n$ converge en probabilité vers 1 lorsque $n \to \infty$.

(7,**S**) Étudier à l'aide de simulations si $(L_n^{(\alpha)} - n)/\sqrt{n}$ converge en loi lorsque $n \to \infty$ et, le cas échéant, étudier et commenter la dépendance en α de la loi limite.

(8,**T**) Calculer $\mathbb{E}[s^{W_n}]$ pour $s \in [0,1]$. En déduire (par exemple en utilisant le développement en série de $(1-x)^{-n}$) que

$$\mathbb{P}(W_n = 0) = \frac{1}{4^n}\binom{2n-1}{n}$$

pour $n \geq 1$, et trouver un équivalent de $\mathbb{P}(W_n = 0)$ lorsque $n \to \infty$.

(9,**T**) Montrer que $\widehat{L}_n/n$ converge en probabilité vers 1 lorsque $n \to \infty$.

(10,**S**) Étudier à l'aide de simulations si $(\widehat{L}_n - n)/\sqrt{n}$ converge en loi lorsque $n \to \infty$.