X2015 – MAP 311

PC 5 – Lundi 30 mai 2016 – Convergences de variables aléatoires

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Exercice 1. (Petites questions)

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge presque sûrement vers X. Montrer que $f(X_n)$ converge presque sûrement vers $f(X)$.

(2) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge presque sûrement vers X et $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge presque sûrement vers Y. Montrer que (X_n, Y_n) converge presque sûrement vers (X, Y).

(3) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles intégrables qui converge en moyenne vers une variable aléatoire réelle intégrable X. Montrer que $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$.
Indication. On pourra utiliser le fait que $-|X_n - X| \leq X_n - X \leq |X_n - X|$.

1 Convergence presque sûre

Exercice 2. Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{P}(X \geq a) = a^{-\lambda}$ pour tout $a \geq 1$. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X, définies sur le même espace de probabilité. On pose

$$T_n = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i \right)^{1/n}.$$

Montrer que T_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire qu'on déterminera.

Exercice 3. Soit $(Z_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout entier $n \geq 1$, Z_n est une variable aléatoire exponentielle de paramètre n. Montrer que Z_n converge presque sûrement vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Soit $k \geq 1$ un entier. On pose $S_0 = k$ et pour tout $n \geq 1$

$$S_n = k + X_1 + \cdots + X_n.$$

Soit $T = \inf\{i \geq 1 : S_i = 0 \text{ ou } S_i = 2k\}$ (avec la convention $\inf \emptyset = \infty$).

Pour des questions, demande d'explications etc., n'hésitez pas à m'envoyer un mail.

(1) Montrer que $T < \infty$ presque sûrement.

(2) On pose $Z_n = S_{\min(n,T)}$. Montrer que Z_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire dont on identifiera la loi. Est-ce que Z_n converge en probabilité ? En moyenne ?

2 Convergence en probabilité

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que la convergence

$$\frac{1}{\ln(n)} \max_{1\leq k\leq n} X_k \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{\lambda}$$

a lieu en probabilité.

3 Convergence dans $\mathbb{L}^1$ (en moyenne)

Exercice 6. Soit $\alpha > 0$, et soit $(Z_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi donnée par

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha} \text{ et } \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$

Montrer que $Z_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^1$. Est-ce que la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité ? Est-ce que la suite (Z_n) converge presque-sûrement ?

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire réelle intégrable. Montrer que $\mathbb{E}\left[X \mathbb{1}_{|X|>n}\right] \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée et $\alpha > 0$. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 0} e^{-\alpha n} \frac{(\alpha n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Exercice 9. **(Lemme de Scheffé)** Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires **positives** qui convergent presque sûrement vers X. On suppose que $\mathbb{E}[X] < \infty$ et que $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$ lorsque $n \to \infty$. Le but de cet exercice est de démontrer que $X_n \to X$ dans $\mathbb{L}^1$.

On pose $Y_n = \min(X_n, X)$ et $Z_n = \max(X_n, X)$.

(1) Démontrer que $\mathbb{E}[Y_n] \to \mathbb{E}[X]$ lorsque $n \to \infty$.

(2) Démontrer que $\mathbb{E}[Z_n] \to \mathbb{E}[X]$ lorsque $n \to \infty$.
Indication. On pourra écrire que $Z_n = X + X_n - Y_n$.

(3) Conclure que $\mathbb{E}[|X_n - X|] \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
Indication. On pourra écrire que $|X_n - X| = Z_n - Y_n$.

4 À chercher pour la prochaine fois (lundi 6 juin)

Exercice 10. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. Trouver la limite presque sûre de

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{X_k}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sum_{k=1}^{n} X_k^2}$$

lorsque $n \to \infty$.

5 Plus appliqué (hors PC)

Exercice 11. (**Problème du collectionneur**) Soit $(X_k, k \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{1,2,\ldots,n\}$. Soit

$$T_n = \inf\{m \geq 1 : \{X_1,\ldots,X_m\} = \{1,2,\ldots,n\}\}$$

le premier temps où toutes les valeurs ont été observées.

(1) Soit $\tau_k^n = \inf\{m \geq 1 : |\{X_1,\ldots,X_m\}| = k\}$ pour tout $k \geq 1$. Montrer que les variables $(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n)_{2\leq k\leq n}$ sont indépendantes, et déterminer leurs lois respectives.

(2) En déduire que la convergence $\frac{T_n}{n\log n} \to 1$ a lieu en probabilité.
Indication. On pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev.

Exercice 12. (**Biais par la taille**) On considère une population comportant un grand nombre n de foyers. On modélise la taille de ces foyers par une suite de variables aléatoires $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ indépendantes de même loi sur $\mathbb{N}^*$, de moyenne $m = \mathbb{E}[X_1] = \sum_{k\geq 1} kp_k < \infty$ avec $p_k = \mathbb{P}(X_1 = k)$. Soit T la taille du foyer d'un individu pris au hasard dans la population. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $\mathbb{P}(T = k)$ converge vers $\frac{k}{m}p_k$ lorsque $n \to \infty$.

6 Pour aller plus loin (hors PC)

Exercice 13. **(Extension du théorème de convergence dominée)** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles telle que X_n converge en probabilité vers X. On suppose qu'il existe une variable aléatoire positive et intégrable Z, indépendante de n, telle que $|X_n| \leq Z$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que X_n converge vers X en moyenne.

Indication. On pourra utiliser que si Y_n converge en probabilité vers Y alors il existe une sous-suite de Y_n qui converge presque sûrement vers Y.

Exercice 14. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui converge en probabilité vers X et soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui converge en probabilité vers Y. Montrer que (X_n, Y_n) converge en probabilité vers (X, Y).

Exercice 15. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles bornées. On suppose que $\mathbb{E}[X^n] = \mathbb{E}[Y^n]$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que X et Y ont la même loi.

Indication. Utiliser le théorème de Weierstrass sur la densité des polynômes.

Exercice 16. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité. Montrer qu'il existe une suite $(c_n)_{n\geq 1}$ telle que X_n/c_n converge presque sûrement vers 0.

Exercice 17. Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires réelles positives, indépendantes et de même loi.

(1) Montrer que p.s. $\sum_{n=0}^{\infty} X_n = \infty$, sauf dans un cas à préciser.

(2) Montrer que $\alpha \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X \geq \alpha n) \leq \mathbb{E}[X] < \alpha \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X \geq \alpha n) + \alpha$.

Indication. On pourra montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \alpha n \mathbb{P}(\alpha n \leq X < \alpha(n+1)) \leq \mathbb{E}[X] \leq \sum_{n\geq 0} \alpha(n+1)\mathbb{P}(\alpha n \leq X < \alpha(n+1)).$$

(3) Montrer que pour tout $\alpha > 0$ on a l'équivalence suivante :

$$\mathbb{E}[X] < \infty \iff \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X \geq \alpha n) < \infty.$$

(4) En déduire la dichotomie suivante : presque sûrement,

$$\text{la plus grande valeur d'adhérence de } \frac{X_n}{n} \text{ vaut } \quad \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{E}[X_1] < \infty \\ \infty & \text{si } \mathbb{E}[X_1] = \infty \end{cases}.$$

Exercice 18. (Loi forte des grands nombres, cas non intégrable) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On pose, pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Montrer que si X_1 n'est pas intégrable alors la suite $(n^{-1}S_n)_{n\geq 1}$ diverge p.s.

Indication. On pourra utiliser la question (3) de l'exercice 17 et montrer que si S_n/n converge alors $X_n/n \to 0$.

Exercice 19. La convergence de l'exercice 5 a-t-elle lieu presque sûrement ? Dans $\mathbb{L}^1$?