X2015 – MAP 311

PC 2 – Lundi 2 mai 2016 – Variables aléatoires réelles

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Exercice 1. **(Petites questions)**

(1) On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la plus petite tribu de $\mathbb{R}$ qui contient tous les intervalles de la forme $]-\infty, a]$ avec $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

(2) Soit X une variable aléatoire réelle. Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ deux boréliens disjoints. Que vaut $\mathbb{P}(X \in A \text{ et } X \in B)$?

(3) Soit $(E, \mathcal{E}, \mathbb{Q})$ un espace probabilisé. Existe-t-il une variable aléatoire dont la loi est $\mathbb{Q}$? (autrement dit, existe-t-il un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$ dont la loi est $\mathbb{Q}$?)

1 Variables aléatoires réelles

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre 1. Soit $\lambda > 0$. Montrer que λX suit une loi exponentielle de paramètre $1/\lambda$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Soit $a > 0$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\lfloor aX \rfloor + 1$?

(pour un nombre réel $x \in$R, $\lfloor x \rfloor$ désigne l'unique entier k tel que $k \leq x < k+1$)

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = xe^{-x^2/2} \mathbb{1}_{x>0}$.

(1) Vérifier que f est bien une densité.

(2) Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi a pour densité f. Reconnaître la loi de la variable aléatoire X^2.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1 et $a > 0$. La variable aléatoire $\min(X, a)$ est-elle une variable aléatoire à densité ?

Exercice 6. Soit Z une variable aléatoire réelle de Cauchy (de densité $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$). Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la variable aléatoire $|Z|^\alpha$ est-elle intégrable ?

Exercice 7. Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[-1, 1]$. Calculer $\mathbb{E}\left[e^U\right]$.

Pour des questions, demande d'explications etc., n'hésitez pas à m'envoyer un mail.

2 Variables aléatoires réelles indépendantes

Exercice 8. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et Y suit une loi géométrique de paramètre p. Calculer $\mathbb{P}(X > Y)$.

Exercice 9. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et Y suit une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. Identifier la loi de la variable aléatoire $\min(X, Y)$.

Exercice 10. Soient $n \geq 1$ et $\theta > 0$. On considère des variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$ indépendantes qui sont distribuées uniformément sur le segment $[0, \theta]$. On pose

$$S = \frac{n+1}{n} \cdot \max(U_1, \ldots, U_n).$$

Calculer l'espérance et la variance de S.

3 Exercice à chercher pour le lundi 9 mai

Exercice 11. Calculer les espérances et les variances des lois suivantes :

(1) Variable aléatoire uniforme sur $[a, b]$.

(2) Variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

(3) Variable aléatoire normale de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

4 Plus appliqué (hors PC)

Exercice 12. Soit Z une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $\alpha, \beta > 0$ on pose $X = \beta Z^{1/\alpha}$.

(1) Quelle est la fonction de répartition de X ?

(2) La loi de X admet-elle une densité ?

La loi de X est appelée loi de Weibull de paramètre (α, β). Elle est utilisée (entre autres) pour modéliser des temps de panne.

Exercice 13. (Générer une loi uniforme avec des variables de Bernoulli) Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/2$. On pose $Z = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} X_k$.

(1) On note

$$\mathcal{D} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{2^k} : n \geq 1, i_1, \ldots, i_n \in \{0, 1\} \right\}$$

l'ensemble des nombres dyadiques de $[0,1]$, qui sont denses dans $[0,1]$. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]$ dont la fonction de répartition F_Y vérifie $F_Y(t) = t$ pour tout $t \in \mathcal{D}$. Montrer que Y est une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$.

(2) Montrer que pour tous $i_1, \ldots, i_p \in \{0,1\}$ on a

$$\mathbb{P}\Big(X_1 = i_1, \ldots, X_p = i_p\Big) = \mathbb{P}\left(Z \in \left[\sum_{i=1}^{p} i_j 2^{-j}, \sum_{j=1}^{p} i_j 2^{-j} + 2^{-p}\right]\right).$$

En déduit que que Z est une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$.

(3) Réciproquement, montrer que si Y est une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$, alors les bits de son écriture en base 2 forment une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre 1/2.

(4) Que se passe-t-il en base $b \geq 3$ avec la loi uniforme sur $\{0, \ldots, b-1\}$?

5 Pour aller plus loin (hors PC)

Exercice 14. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et $(A_i)_{i\geq 1}$ un système complet d'événements (on rappelle que cela signifie que $A_i \in \mathcal{A}$ pour tout $i \geq 1$, que $\cup_{i\geq 1} A_i = \Omega$ et que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$).

On considère l'application $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ définie par $X(\omega) = i$, où i est tel que $\omega \in A_i$. Montrer que X est une variable aléatoire ($\mathbb{N}^*$ étant dénombrable, on le munit naturellement de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$).

Exercice 15. (Exemple d'ensemble non mesurable) Soit $\mathbb{P}$ la loi d'une variable aléatoire uniforme sur $[0,2\pi]$ (muni de la tribu borélienne sur $[0,2\pi]$). On voit $[0,2\pi]$ comme le cercle unité $\mathbb{S}$ en identifiant les deux points 0 et 2π. Choisissons $\alpha > 0$ tel que $\alpha/(2\pi)$ soit irrationel, et notons R_α la rotation d'angle α sur le cercle, définie par $R_\alpha(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+\alpha)}$. On note $R_\alpha^{(n)}$ la composée n-ième de R_α pour $n \in \mathbb{Z}$.

Si $z \in \mathbb{S}$, l'orbite de z est par définition l'ensemble $\{R_\alpha^{(n)}(z) : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{S}$. Comme $\alpha/(2\pi)$ est irrationnel, on peut montrer que toutes les orbites sont infinies (et même denses).

Notons $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ l'ensemble des orbites, et en utilisant l'axiome du choix choisissons pour tout $i \in I$ un représentant $z_i \in O_i$. Posons finalement

$$E = \{z_i : i \in I\}.$$

(1) Montrer que $\mathbb{S} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} R_\alpha^{(n)}(E)$ et que cette union est disjointe.

(2) En supposant que E est mesurable, aboutir à une contradiction.