X2015 – MAP 311

PC 1 – Lundi 18 avril 2016 – Espaces probabilisés

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

1 Manipulations des concepts de base

Exercice 1. **(Petites questions)**

(1) Est-ce que l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ forme une tribu ?

(2) Soient A et B deux événements tels que $A \subset B$. On suppose que $\mathbb{P}(A) = 1$; que dire de $\mathbb{P}(B)$? Et si $\mathbb{P}(B) = 0$, que dire de $\mathbb{P}(A)$?

(3) Si $(A_n)_{n \geq 0}$ sont des événements tels que $\mathbb{P}(A_n) = 0$ pour tout $n \geq 0$, montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = 0$.

(4) Si $(A_n)_{n \geq 0}$ sont des événements tels que $\mathbb{P}(A_n) = 1$ pour tout $n \geq 0$, montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 0} A_n\right) = 1$.

(5) Vrai ou faux ? Si A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$ alors $B = \overline{A}$.

(6) Vrai ou faux ? Si A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ alors A et B sont incompatibles.

Exercice 2. **(Cylindres)** On modélise des lancers d'une pièce comme suit. On pose $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$. Pour $\omega = (\omega_n)_{n \geq 1} \in \Omega$ on interprète ω_k comme le résultat du k-ième lancer (1 pour pile, 0 pour face). Pour tout $k \geq 1$ et $u_1, \ldots, u_k \in \{0, 1\}$ on définit l'ensemble

$$C_{u_1, u_2, \ldots, u_k} = \{(\omega_n)_{n \geq 1} : \omega_1 = u_1, \ldots, \omega_k = u_k\}. \tag{1}$$

Exprimer (par des unions, intersections et complémentaires) les événements suivants en fonction d'ensembles de type (1) :

(i) B_n : « on obtient pile pour la première fois au n-ième lancer »

(ii) A : « le résultat du second lancer est pile »

(iii) C : « on n'obtient jamais pile »

(iv) D_n : « on obtient pile au moins deux fois au cours des n premiers lancers »

On admet l'existence d'une plus petite tribu $\mathcal{A}$ contenant tous les ensembles de type (1) et l'existence d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que

$$\mathbb{P}\left(C_{u_1, u_2, \ldots, u_k}\right) = \frac{1}{2^k}. \tag{2}$$

Pour des questions, demande d'explications etc., n'hésitez pas à m'envoyer un mail.

(v) Calculer les probabilités des événements A, B_n, C, D_n précédents.

Remarque : On peut prouver que Ω n'est pas dénombrable, et qu'il n'existe pas de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que (2) soit vérifiée pour tous les ensembles de type (1).

Exercice 3. **(Probabilités conditionnelles)** On cherche un bicorne dans un meuble constitué de sept tiroirs. La probabilité qu'il soit effectivement dans ce meuble est p. Sachant qu'on a examiné les six premiers tiroirs sans succès, quelle est la probabilité qu'il soit dans le septième ?

Exercice 4. **(Indépendances)** On dispose de quatre livres, un livre de mathématiques, un livre de biologie, un livre de chimie, et un livre mathématiques-biologie-chimie. On choisit au hasard, avec la probabilité uniforme, un livre parmi les quatre. Notons M, B et C les événements « le livre choisi traite notamment de mathématiques » (respectivement biologie, chimie). Les événements M, B et C sont-ils indépendants ?

2 Lemmes de Borel–Cantelli

Exercice 5. **(Limite supérieure d'ensembles)** Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. On pose

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{p\geq 1}\left(\bigcup_{n\geq p} A_n\right).$$

(1) Que représente l'événement $\limsup_{n\to\infty} A_n$?

(2) Si $A = \mathbb{R}$, donner $\limsup_{n\to\infty} A_n$ dans les trois cas suivants :

(i) $A_n = [-1/n, 3 + 1/n]$

(ii) $A_n = [-2 - (-1)^n, 2 + (-1)^n[$

(iii) $A_n = p_n\mathbb{N}$, où $(p_n)_{n\geq 1}$ est la suite des nombres premiers et $p_n\mathbb{N}$ est l'ensemble des multiples de p_n,

(3) Comparer $\limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n)$ et $\limsup_{n\to\infty}(A_n \cap B_n)$ avec $\limsup_{n\to\infty} A_n$ et $\limsup_{n\to\infty} B_n$.

(4) Que représente l'événement $\bigcup_{p\geq 1}\left(\bigcap_{n\geq p} A_n\right)$?

Exercice 6. **(Marche aléatoire vue de l'origine)** Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(Y_n = -1) = 1 - p$ avec $0 < p < 1$ et $p \neq 1/2$. On considère la marche aléatoire $Z_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ (avec $Z_0 = 0$). On note $A_n = \{Z_n = 0\}$.

(1) Que représente l'événement $\limsup_{n\to\infty} A_n$?

(2) Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

(3) Lorsque $p = 1/2$, on peut montrer en utilisant la formule de Stirling que

$$\mathbb{P}(Z_{2n} = 0) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Peut-on en déduire directement que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$?

Exercice 7. **(Piles consécutifs)** On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. Pour $n \geq 1$, on note L_n la plus longue séquence de « piles » consécutifs dans les n premiers lancers. Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de L_n quand $n \to \infty$. Par exemple :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
tirage	F	P	P	F	P	P	P	F	P	$\cdots$
L_n	0	1	2	2	2	2	3	3	3	$\cdots$

Pour modéliser ce problème, on considère $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = 1/2$. Posons :

$$L_n := \max\{k \geq 1;\ \text{il existe } i \leq n-k \text{ tel que } X_{i+1} = \cdots = X_{i+k} = 1\}.$$

(1) Montrer que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ on a $\mathbb{P}(L_n \geq j) \leq \frac{n-j+1}{2^j} \leq \frac{n}{2^j}$.

(2) Montrer que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ on a $\mathbb{P}(L_n \leq j) \leq \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)^{\lfloor n/j \rfloor}$.

(3) Trouver une suite (a_n) de nombre réels positifs tels que pour tout $\epsilon \in]0,1[$, on a

$$\mathbb{P}\left(1 - \epsilon < \frac{L_n}{a_n} < 1 + \epsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

(4) Montrer que pour tout $\epsilon \in]0,1[$, on a $\mathbb{P}\left(\frac{L_n}{a_n} > 1 - \epsilon, \text{ à partir d'un certain rang}\right) = 1$.
Montrer que pour tout $\epsilon \in]0,1[$, on a $\mathbb{P}\left(\frac{L_n}{a_n} < 1 + \epsilon, \text{ à partir d'un certain rang}\right) = 1$.

(5) En déduire que $\mathbb{P}\left(\frac{L_n}{a_n} \to 1 \text{ lorsque } n \to \infty\right) = 1$.

3 Exercice à chercher pour le lundi 2 mai

Exercice 8. **(Un contre-exemple ?)** Soit X une variable aléatoire géométrique de paramètre 1/2. Pour $n \geq 1$, on considère l'évènement $A_n = \{X \geq \ln(n)/\ln(2)\}$. Montrer que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ et que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$. Commenter.

4 Plus appliqué

Exercice 9. (**Un petit calcul**) Combien de fois faut-il, en moyenne, lancer une pièce en l'air pour observer une suite d'un nombre impair de piles, suivi d'un face ?

Exercice 10. **(Pouvoir paranormal moyen)** On considère l'expérience de divination suivante. On dispose d'un jeu de 52 cartes distinctes, d'un manipulateur et d'un devin. Le devin ne peut à aucun moment voir le jeu ou le manipulateur, et doit deviner quelle est la carte se trouvant sur le dessus du paquet. Il annonce donc une carte au hasard, et le manipulateur retourne silencieusement les cartes les unes après les autres jusqu'à tomber sur la carte annoncée par le devin. Après quoi ce dernier doit deviner la carte qui suit. Il annonce une carte au hasard parmi les 51 restantes, et le manipulateur continue de retourner les cartes à partir de l'endroit où il s'était arrêté. Ainsi de suite jusqu'à ce que tout le paquet soit retourné.

(1) Donner un espace de probabilité correspondant à cette expérience.

(2) Montrer que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X \geq k)$.

(3) Combien de cartes en moyenne le devin trouvera-t-il ?

5 Pour aller plus loin

Exercice 11. **(Une application d'un lemme de Borel-Cantelli)** On admet l'existence d'une tribu $\mathcal{A}$ sur $[0,1]$ contenant tous les intervalles inclus dans $[0,1]$ (c'est la tribu borélienne) et d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $([0,1],\mathcal{A})$ telle que $\mathbb{P}([a,b]) = b-a$ pour tous $0 \leq a \leq b \leq 1$ (c'est la mesure de Lebesgue).

Soit $\epsilon > 0$ fixé. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left\{x \in [0,1] : \exists \text{ un nombre fini de rationnels } p/q \text{ avec } \mathrm{pgcd}(p,q)=1 \text{ tq } \left|x-\frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^{2+\epsilon}}\right\}\right) = 1.$$

Ainsi, « presque tout » x est « mal approchable par des rationnels à l'ordre $2+\epsilon$ ».

Indication. Pour tout $q \geq 1$, on pourra considérer

$$A_q := [0,1] \cap \bigcup_{p=0}^{q} \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^{2+\epsilon}}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^{2+\epsilon}}\right].$$