Oraux 2007

Igor Kortchemski

MP*2, lycée Louis le Grand

Première partie
École Polytechnique

1 Anglais facultatif (22/06, M. Wisdom)

« You can't go better than now », texte tiré de *The Economist* paru en février 2007. Les anglais sont grincheux pour des raisons socio-économico-politiques alors que d'après les chiffres ils ne devraient pas l'être : la mondialisation a offert à la Grande-Bretagne une croissance stable durant ces dernières années. La mondialisation a cependant créé un flux d'immigration qui n'est pas géré de manière efficace : on assiste à un phénomène de multiculturalisme. L'assimilation apparaît alors comme une meilleure alternative.

Question : « Comment considère-t-on en France les personnes aisées ? » Pour l'examinateur, en France, en gros, seules les personnes aisées devenues telles en héritant sont bien vues.

Je fais ensuite un commentaire sur les bienfaits de la mondialisation ainsi que sur ses dérives.

Examinateur sympathique, qui me dit : « Take place on the electric chair » quand j'entre. Il clôt l'entretien par un petit monologue sur l'importation du caviar depuis la Russie.

2 ADS mathématiques (23/06, M.Hennecart)

« Fonctions de la variable complexe ». Le texte introduisait les définitions des fonctions holomorphes, analytiques, de l'intégrale suivant un chemin. On démontrait des formules intégrales pour arriver finalement à l'équivalence entre le fait d'être holomorphe ou analytique. Figuraient ensuite des applications (Théorème de Liouville, principe des zéros isolés, principe du Maximum, démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss, lemme de Schwarz). Le texte était long (douze pages si mes souvenirs sont bons), et quelques étapes techniques étaient peu détaillées.

Questions de l'examinateur (rebondissant sur mon introduction, où j'ai dit que l'on verra quelques différences entre les dérivation réelle et complexe) :

1. Trouver une primitive de :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} - \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{C}. \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{z} \end{array}$$

2. Trouver une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas analytique (c-à-d qu'il existe un point tel que sur aucun de ses voisinages f soit la somme d'une série entière).
3. Connaissez-vous une autre démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss [c-à-d différente de celle figurant dans l'ADS].

Examinateur neutre, intervenant peu : aucun commentaire sur l'exposé, il n'a pris la parole que pour poser des questions, et m'a laissé poursuivre ma méthode horrible pour le 1. (j'ai défini la primitive $F(z)$ par $F(z) = \int_0^1 \frac{1}{\gamma(t)}\gamma'(t)dt$ où $\gamma(t) = (1-t) + tz$...).

3 Chimie (24/06, M. Mesplede)

I On étudie la réaction $AgO_2(s) = Ag(s) + O_2(g)$. On donne les enthalpies libre standard de formation de AgO_2,CO,CO_2 à $25°C$, les constantes de réaction à $410, 450, 500, 600K$.
   1. Calculer la constante de réaction à $25°C$.
   2. Que tracer en fonction de K^0 et T pour obtenir une droite ? (Question que l'examinateur a voulu que je saute : j'avais proposé la loi de Van't Hoff pour la première question)
   3. On considère une enceinte de $2\,dm^3$ préalablement vidée d'air et thermostatée à $135°C$. On introduit :
      a. $n_0 = 0,1\,mol$ de $AgO_2(s)$
      b. $n_0 = 0,01\,mol$ de $AgO_2(s)$

      Décrire le plus précisément possible l'état final. Calculer l'affinité à l'état final.

II On considère l'acide sulfurique H_2SO_3, diacide. On donne $pKa_1 = 1,91$, $pKa_2 = 7,18$. On dose un volume V_0 d'une solution d'acide sulfurique à C_0 grâce à une solution de soude à une concentration C par suivi pH-métrique.
   1. Préciser les électrodes qui permettent ce suivi.
   2. Donner les équations bilan des dosages successifs. Calculer leur constante de réaction.
   3. Donner les volumes équivalents.

Examinateur neutre, signalant les erreurs (« En êtes-vous sûr ? ») et qui passe à la question suivante si on ne sait pas répondre à une question.

4 Physique (24/06, Mme Robillard)

On considère un cycliste se déplaçant sur une ligne droite à vitesse constante. Afin de négocier un virage (disons circulaire), il se penche. Comment évolue sa vitesse ?

Examinatrice donnant nulle indication, mais apparemment attentive comme le signalent ses « mhmh », « mhmh », « mhmh » répétitifs. Elle m'a cependant gentillement convié à vérifier l'homogénéité de ma formule issue d'une analyse dimensionnelle pour laquelle j'avais malencontreusement écrit $[g] = MLT^{-2}$...

5 LV Russe (25/06, Mme Bottineau)

Cassette audio

Article décrivant la vie d'un russe de 13 ans passionné de chimie depuis l'âge de 6 ans.

Texte

Article tiré de *Argumenti i Facti* décrivant l'émergeance d'une nouvelle classe économique en Russie : la classe moyenne.

Examinatrice sympathique.

6 Mathématiques 2 (27/06, M. Grigis)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue intégrable. On pose :

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} - \{0\} & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & f\left(x - \dfrac{1}{x}\right) \end{array}$$

1. Montrer que g est intégrable.
2. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$.

Examinateur discret, mais signalant les erreurs de calcul. Pour la deuxième question, il me suggère de regarder ce que ça donne si f est une fonction caractéristique d'un segment.

7 Français (28/06, M. Chatelain)

Texte à résumer

Il est clair qu'il faut d'abord inculquer aux jeunes gens les conventions fondamentales qui leur permettront les relations avec leurs semblables, et les notions qui, éventuellement, leur donneront les moyens de développer leurs forces ou de parer à leurs faiblesses dans le milieu social. Mais quand on examine ce qui est, on est frappé de voir combien les méthodes en usage, si méthodes il y a, (et il ne s'agit pas seulement d'une combinaison de routine, d'une part, et d'expérience ou d'anticipation téméraire, d'autre part), négligent cette réflexion préliminaire que j'estime essentielle. Les préoccupations dominantes semblent être de donner aux enfants une culture disputée entre la tradition dite *classique*, et le désir naturel de les initier à l'énorme développement des connaissances et de l'activité modernes. Tantôt une tendance l'emporte, tantôt l'autre ; mais jamais, parmi tant d'arguments, jamais ne se produit la question essentielle :

- Que veut-on et que faut-il vouloir ? C'est qu'elle implique une décision, un parti à prendre. Il s'agit de se présenter *l'homme de notre temps*, et cette *idée de l'homme* dans le milieu probable où il vivra doit être d'abord établie. Elle doit résulter de l'observation précise, et non du sentiment et des préférences des uns et des autres, - de leurs espoirs politiques, notamment. Rien de plus coupable, de plus pernicieux et de plus décevant que la politique de parti en matière d'enseignement. Il est cependant un point où tout le monde s'entend, s'accorde déplorablement. Disons-le : l'enseignement a pour objectif réel, le *diplôme*.

Je n'hésite jamais à le déclarer, le diplôme est l'ennemi mortel de la culture. Plus les diplômes ont pris d'importance dans la vie, (et cette importance n'a fait que croître à cause des circonstances économiques), plus le rendement de l'enseignement a été faible. Plus le contrôle s'est exercé, s'est multiplié, plus les résultats ont été mauvais.

Mauvais par ses effets sur l'esprit public et sur l'esprit tout court. Mauvais parce qu'il crée des espoirs, des illusions de droits acquis. Mauvais par tous les stratagèmes et subterfuges qu'il suggère ; les recommandations, les préparations stratégiques, et, en somme, l'emploi de tous expédients pour franchir le seuil redoutable. C'est là, il faut l'avouer, une étrange et détestable initiation à la vie intellectuelle et civique.

D'ailleurs, si je me fonde sur la seule expérience et si je regarde les effets du contrôle en général, je constate que le contrôle, en toute matière, aboutit à vicier l'action, à la pervertir... Je vous l'ai déjà dit : dès qu'une action est soumise à un contrôle, le but profond de celui qui agit n'est plus l'action même, mais il conçoit d'abord la prévision du contrôle, la mise en échec des moyens de contrôle. Le contrôle des études n'est qu'un cas particulier et une démonstration éclatante de cette observation très générale.

Le diplôme fondamental, chez nous, c'est le baccalauréat. Il a conduit à orienter les études sur un programme strictement défini et en considération d'épreuves qui, avant tout, représentent, pour les examinateurs, les professeurs et les patients, une perte totale, radicale et non compensée, de temps et de travail. Du jour où vos créez un diplôme, un contrôle bien défini, vous voyez aussitôt s'organiser en regard tout un dispositif non moins précis que votre programme, qui a pour but unique de conquérir ce diplôme par tous moyens. Le but de l'enseignement n'étant plus la formation de l'esprit, mais l'acquisition du diplôme, c'est le minimum exigible qui devient l'objet des études. Il ne s'agit plus d'apprendre le latin ou le grec, ou la géométrie. Il s'agit d'emprunter, et non plus d'*acquérir*, d'*emprunter* ce qu'il faut pour passer le *baccalauréat*.

Ce n'est pas tout. Le diplôme donne à la société un fantôme de garantie, et aux diplômés des fantômes de droit. Le diplômé passe officiellement pour savoir : il garde toute sa vie ce brevet d'une science momentanée et purement expédiente. D'autre part, ce diplômé au nom de la loi est porté à croire qu'on lui doit quelque chose. Jamais convention plus néfaste à tout le monde, à l'État et aux individus, (et, en particulier, à la culture), n'a été instituée. C'est en considération du diplôme, par exemple, que l'on a vu se substituer à la lecture des auteurs l'usage des résumés, des manuels, des comprimés de science extravagants, les recueils de questions et de réponses toutes faites, extraits et autres abominations. Il en résulte que plus rien dans cette culture adultérée ne peut aider ni convenir à la vie d'un esprit qui se développe.

Paul Valéry, « Le bilan de l'intelligence », 1935.

(Il y avait un dernier paragraphe concernant l'enseignement des humanités, mais je n'ai pas réussi à le retrouver).

Entretien

Assez peu de questions en définitive :

1. Quand situez-vous l'École Républicaine ? (dans mon commentaire, j'avais évoqué 1950)
2. Quel grand nom est associé à l'École Républicaine ? Quand le situez-vous ?

3. Depuis quand le baccalauréat existe-t-il ? Dans quelle grande tradition s'inscrit-il ?
4. Quelle réforme du baccalauréat a-t-elle été envisagée dernièrement ? Qu'en pensez vous à titre personnel ? [il s'agissait de l'instauration du contrôle continu]

8 Mathématiques 1 (28/06, M. Rosso)

1. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$ et $|||\cdot|||$ sa norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $|||A||| \leq 1$ et que 1 est valeur propre de A. Montrer que 1 est racine simple du polynôme minimal de A.
2. Existe-t-il $||\cdot||$, norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall P \in Gl_n(\mathbb{C}), \qquad ||PAP^{-1}|| = ||A||?$$

Examinateur : RÀS.

Deuxième partie

Écoles Normales Supérieures

9 Russe (25/06, Mme Milkovitch)

Texte issu d'un site internet datant de juin 2007. On décrivait ce que pensait le « КПРФ » (l'abbréviation était tout le temps utilisée : il s'agit du parti communiste russe) à propos d'un éventuel changement de la constitution russe qui aurait des répercussions sur le mandat présidentiel. Le journaliste rapportait deux avis contradictoires.

S'ensuite un entretien :

1. Quels groupes veulent/ne veulent pas un changement de la constitution russe ?
2. Quels groupes ont intérêt à ce que Poutine reste président ? Qu'en pense la population ?
3. Comment expliquer la présence de deux avis contradictoires et cette duplicité ?
4. Quelle est, à votre avis, l'influence du parti communiste en Russie ? Qui sont, à votre avis, ceux qui votent pour le parti communiste ?
5. Qu'est ce que le G8 ? Quels sont les pays qui le constituent ? À quoi sert-il ? Quel a été le principal thème de discussion du dernier sommet ?

Examinatrice plutôt sympathique.

10 Mathématiques Lyon (02/07, M. Druet)

Soit $\alpha > 0$. On s'intéresse à (E) : $y'(x) = \alpha\sqrt{y(x)} - x$ avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

1. Discuter l'existence et l'unicité locales.

   On étudie dorénavant les solutions sur $\mathbb{R}^+$. Dans les questions 2 et 3, on part de la condition initiale $y(0) > 0$.
2. Si $\alpha^2 < 8$, montrer que les solutions maximales ne peuvent pas être définies sur $\mathbb{R}^+$ tout entier. Indication : utiliser $\frac{y(x)}{x^2}$.
3. Tracer l'allure des courbes intégrales (α fixé avec toujours $\alpha^2 < 8$).
4. Existe-t-il une solution avec $y(0) = 0$?

Examinateur sympathique.

11 Mathématiques Ulm/Lyon/Cachan (03/07, M. Dumitrescu)

1. Calculer la différentielle de :

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C}^n \\ M & \mapsto & (\mathrm{tr}(M), \mathrm{tr}(M^2), \ldots, \mathrm{tr}(M^n)) \end{array}$$

2. Montrer que $\mathrm{rg}\, d\phi(M) = \deg \mu_M$, où μ_M est le polynôme minimal de M.

Examinateur : muet pendant tout l'oral.

12 Maths Cachan (04/07, Mme Bonnaillie-Noël)

Soit H un espace de Hilbert réel. On note $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des endomorphismes continus de H que l'on munit de la norme subordonnée à la norme issue du produit scalaire.

1. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ avec $|||T||| < 1$. On note $B = \{u \in \mathcal{L}(H), |||u||| \leq |||T|||\}$. Soit :
$$\begin{array}{rcl} u : \mathcal{L}(H) & \to & \mathcal{L}(H) \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2}(x^2 + T) \end{array}$$
Montrer que u admet un unique point fixe dans B.
2. Soit $a \in \mathcal{L}(H)$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant :
$$\forall x \in H, \quad \langle a(x)|x\rangle \geq \alpha||x||^2.$$
Montrer qu'il existe $s \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant $s^2 = a$ et :
$$\exists \beta > 0, \forall x \in H, \quad \langle s(x)|x\rangle \geq \beta||x||^2.$$

Examinatrice : RÀS.

13 Maths Ulm (05/07, M.Debarre)

Soit $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble de points vérifiant : pour tout $P \in \mathbb{R}^2$, il existe $A \in \mathcal{S}$ tel que $d(P, A) \leq 1$. Soit $Q \in \mathbb{R}[X, Y]$ tel que :
$$\forall (x, y) \in \mathcal{S}, \quad Q(x, y) = 0.$$
Montrer que $Q = 0$.

Examinateur : RÀS.

14 Physique Ulm/Lyon/Cachan (06/07)

On considère deux ondes planes progressives harmoniques monochromatiques de pulsation ω et de même intensité, issues d'une même source laser (et donc cohérentes), qui se meuvent dans un plan horizontal (Oxy). Leurs vecteurs d'ondes respectifs, $\overrightarrow{k_1}$ et $\overrightarrow{k_2}$, font un angle 2α entre eux, avec $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

1. Décrire ce qui se passe (on suppose que les deux ondes sont polarisées perpendiculairement à (Oxy)). Dans l'expression $E(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{e} \exp(i(\omega t - \overrightarrow{k} . \overrightarrow{r}))$, à quoi voit-on que l'onde est monochromatique ? plane ? Comment appelle-t-on $\overrightarrow{e}$? Une onde plane électromagnétique dans le vide est-elle nécessairement transverse-électromagnétique ? Que vaut k ? Et en fonction de λ ? Donner deux analogies rappelant l'expression de l'intensité obtenue.
2. On fait la même chose sous l'eau. Dire ce qui change.
3. Donner le profil de température du milieu (en régime stationnaire).

4. On coupe le laser. Prévoir qualitativement la variation du profil de température. Le donner quantativement.
5. On revient au régime stationnaire de la question 3. On envoie un nouveau faisceau laser (incohérent avec le premier laser) perpendiculairement au plan (Oxy). Décrire ce qui se passe.
6. On coupe maintenant uniquement le premier laser. Décrire ce qui se passe.

   On accède ainsi à une mesure expérimentale de la conductivité thermique de l'eau.

Examinateur : fort sympathique.

15 TIPE (08/07, MM. Côte et Madore)

J'ai rapidement présenté le contenu de mon TIPE ; première partie : étude des bonnes suites, deuxième partie : étude de la longueur de la plus longue sous-suite croissante en utilisant la correspondance de Robinson-Schensted.

S'ensuivent des questions :

1. En notant $E[l_n]$ la longueur moyenne de la plus longue sous-suite croissante de longueur n, vous évoquez que $E[l_n] \sim 2\sqrt{n}$ quand n tend vers l'infini. Connaissez-vous un terme d'erreur ?
2. Si
$$\pi \xrightarrow{\text{R-S}} (P, Q),$$
connaissez-vous σ telle que
$$\sigma \xrightarrow{\text{R-S}} (Q, P)?$$
Est-ce quelque chose de simple à montrer ?
3. Que vaut le nombre de tableaux de Young standards à n cases ?
4. On note I_n le nombre d'involutions de $\mathcal{S}n$, c'est à dire le cardinal de l'ensemble $\{\sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma \circ \sigma = id\}$. Trouver une relation de récurrence vérifiée par I_n.
5. On s'intéresse à la probabilité d'avoir un long cycle. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On dit que σ possède un *long cycle* s'il existe un cycle de longueur strictement supérieure à $\frac{n}{2}$ intervenant dans sa décomposition en cycles à support deux-à-deux disjoints. On note P_n la probabilité qu'une permutation de $\mathcal{S}_n$ ait un long cycle (on munit évidemment $\mathcal{S}_n$ de la loi uniforme). Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$.
6. Le cruel Docteur No a capturé 100 mathématiciens pour les soumettre à une épreuve démoniaque. Il a placé (dans un ordre connu de lui seul) le nom de chacun des 100 mathématiciens dans autant de boîtes numérotées de 1 à 100. Après avoir permis aux mathématiciens de se concerter, il va les soumettre à son épreuve dont il leur communique les termes : il empêchera toute communication entre eux et les emmènera, dans un certain ordre, dans la pièce où se trouvent les 100 boîtes. Lorsqu'un mathématicien est dans la pièce, il pourra ouvrir une boîte de son choix pour lire le nom qui y figure, puis, s'il le souhaite, en ouvrir une autre, puis éventuellement une autre, et ainsi de suite jusqu'à 50 boîtes au maximum. (Les boîtes sont, bien entendu, refermées avant le passage du prochain mathématicien, puisque toute communication est interdite après la concertation initiale.) Le but de chaque mathématicien, lorsqu'il passe dans la pièce contenant les

boîtes, est d'ouvrir la boîte contenant son nom (parmi les ≤ 50 boîtes qu'il peut ouvrir). Si chaque mathématicien a réussi à ouvrir la boîte contenant son nom, alors le Docteur No les libérera tous. Si ne serait-ce qu'un seul n'a pas réussi, alors le Docteur No tuera tous les mathématiciens avec ses tortures particulièrement raffinées.

Si chaque mathématicien ouvrait bêtement 50 boîtes au hasard, il aurait une chance sur deux de voir son nom dans l'une d'elles, et la probabilité que tous les mathématiciens réussissent le test (donc soient libérés) serait d'une chance sur 2 puissance 100. Mais comme ce sont des mathématiciens, ils vont trouver une solution bien plus intelligente. En fait, ils élaborent une stratégie qui leur permet d'avoir plus de 30% de chances de s'en sortir. Comment font-ils ?

Examinateurs : fort sympathiques.

16 Physique Ulm (09/07)

Donner l'équation de la chaleur. Quelle est l'origine microscopique de la diffusion thermique ? Connaissez-vous d'autres phénomènes de diffusion ?

Je mets une frite parallélipipèdique dans mon four. L'eau s'évapore. J'enlève ma frite. Les deux coins de la frites sont cramés. Pourquoi ?

Remarque : il s'agit d'une version sophistiquée d'un exercice figurant dans le Landau/Lifchitz.
Examinateur : jeune, donnant des indications.

Troisième partie

Éléments de réponse

1 ADS mathématiques (23/06, M.Hennecart)

1. Je pense que l'examinateur avait à l'esprit le « logarithme complexe ».
2. f nulle sur $\mathbb{R}^-$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$: sa série de Taylor est nulle.
3. On raisonne par l'absurde, on se ramène par changement de variable et par division à un minimum global en 0 qui vaut 1 puis on aboutit à une contradiction.

2 Physique (24/06, Mme Robillard)

A posteriori, il me semble qu'il suffisait d'écrire la conservation de l'énergie mécanique à un moment où le cycliste roule à inclinaison constante (le cycliste ne glissant, les forces de réaction ne travaillent pas), en notant v' la vitesse pendant le virage, α l'angle d'inclinaison par rapport à la verticale, v_0 la vitesse initiale, $2l$ la hauteur du cycliste et m la masse du cycliste :

$$\frac{1}{2}mv'^2 + mgl\cos(\alpha) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgl.$$

La vitesse augmente donc.

On peut éventuellement déterminer l'angle α permettant un virage à inclinaison constante. En notant R le rayon de courbure, on écrit le PFD et le TMC barycentrique : $N = mg$, $T = \frac{mv'^2}{R-l\sin(\alpha)}$ et $\frac{T}{N} = \tan(\alpha)$. D'où $mv'^2 = mg\tan(\alpha)(R - l\sin(\alpha))$. En remplaçant dans l'expression ci-dessus :

$$mg\tan(\alpha)(R - l\sin(\alpha)) + mgl\cos(\alpha) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgl.$$

En notant $f(\alpha) = mg\tan(\alpha)(R - l\sin(\alpha)) + mgl\cos(\alpha)$, on a $f(0) = 0$, $\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}} f(\alpha) = +\infty$, donc l'équation précédente admet au moins une solution d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Une expression exacte peut éventuellement être obtenue en exprimant tout en fonction de $x = \sin(\alpha)$ par exemple.

3 Mathématiques 2 (27/06, M. Grigis)

1. Faire des changements de variable en utilisant $\phi(x) = x - \frac{1}{x}$.
2. Vérifier [sans faire d'erreurs de calcul...] que ça marche pour une fonction caractéristique d'un segment. Découper l'intégrale de f et approcher uniformément f sur un segment par des fonctions en escalier.

4 Mathématiques 1 (28/06, M. Rosso)

1. Soit $\mu(X) = (X-1)^pQ(x)$ le polynôme minimal de A. On confond matrice et endomorphisme canoniquement associé. On note $F = \ker(A - I_n)^p$ et $\widehat{A} = A_{|F}$. On pose

$N = \widehat{A} - I_q$, où $q = \dim F$. Ainsi, N est nilpotent. On voit aisément qu'il faut et il suffit de prouver que $N = 0$. Par l'absurde, supposons $N \neq 0$. Alors $\ker N^2 \neq \ker N$ (sinon une récurrence facile montre que pour $i \geq 1$, $\ker N^i = \ker N$ de sorte que $\mathbb{C}^q = \ker N$, d'où $N = 0$, ce qui est exclu). Soit donc $x_0 \in \ker N^2 - \ker N$. Alors pour k entier :

$$|||\widehat{A}^k||| \geq \frac{||\widehat{A}^k(x_0)||}{||x_0||} = \frac{||x_0 + kN(x_0)||}{||x_0||} \geq \frac{k||N(x_0)|| - ||x_0||}{||x_0||}.$$

Donc $\lim_{k \to +\infty} |||\widehat{A}^k||| = +\infty$. Or $|||A^k||| \leq 1$. Vu que toutes les normes sont équivalentes, c'est absurde.

2. Soit par l'absurde $|| \cdot ||$ une norme vérifiant les conditions requises. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente non nulle. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de trigonalisation de A. On note A_p la matrice de A dans la base $(\frac{e_1}{p}, \frac{e_2}{p^2}, \dots, \frac{e_n}{p^n})$. Ainsi, $A_p \to 0$ quand p tend vers l'infini (toutes les normes sont équivalentes). Or pour tout p, $||A_p|| = ||A||$. Donc $||A|| = 0$, ce qui est absurde.

5 Mathématiques Lyon (02/07, M. Druet)

1. On suppose $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ (l'examinateur n'a pas souhaité étudier ce cas). Si $y_0 > 0$ on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Si $y_0 = 0$, on raisonne par l'absurde et on tombe sur une contradiction en écrivant un DL à l'ordre 1 de y au voisinage de x_0.
2. On raisonne par l'absurde en notant $\phi(x) = \frac{y(x)}{x^2}$. On trouve alors :

$$\phi'(x) = \frac{1}{x}(\alpha\sqrt{\phi(x)} - 2\phi(x) - 1) \leq \frac{1}{x}\left(\frac{\alpha^2}{8} - 1\right).$$

   En intégrant entre 1 et t on obtient la contradiction souhaitée.
3. D'après l'unicité locale (cf 1.) les courbes intégrales ne se coupent pas. Elles forment alors un ensemble de courbes ressemblant vaguement à des paraboles concaves biscornues vers la droite.
4. Non, sinon on voit qu'une autre courbe intégrale recouperait celle de la solution correspondant à $y(0) = 0$.

6 Mathématiques Ulm/Lyon/Cachan (03/07, M. Dumitrescu)

Pour la deuxième question, on applique le théorème du rang et on utilise le théorème de la dualité : on trouve alors que le rang de la différentielle est égal au rang de n formes linéaires.

7 Maths Cachan (04/07, Mme Bonnaillie-Noël)

1. On utilise les faits suivants :
   - $x^2 - y^2 = x \circ (x - y) + (x - y) \circ y$
   - B est fermé dans un Banach, donc est complet.
   - B est stable par u.
   - u est $|||T|||$-lipschitzienne (on utilise le premier fait)

- On peut alors appliquer le théorème du point fixe.

2. Si $u = \frac{1}{2}(u^2 + T)$, $(u - id)^2 = id - T$. On pose donc $T = Id - \lambda u$ avec λ convenablement choisi afin d'avoir $|||T||| < 1$.

8 Maths Ulm (05/07, M.Debarre)

On raisonne par l'absurde. On écrit $P(x,y) = a_0(x) + ya_1(x) + \cdots + y^n a_n(x)$, où $a_i(X) \in \mathbb{R}[X]$ puis $P(x, \lambda x) = a_0(x) + \lambda x a_1(x) + \cdots + \lambda^n x^n a_n(x)$. Soit x^m la plus grande puissance de x intervenant dans cette dernière expression. On voit que son coefficient est un polynôme en λ, que l'on note $c(\lambda)$. Sans perte de généralité, on suppose le coefficient dominant de $c(\lambda)$ est positif. On voit qu'il existe $K > 0$ tel que :

$$\lambda \geq K \Longrightarrow c(\lambda) \geq 1.$$

De plus :

$$\left| \frac{P(x, \lambda x)}{c(\lambda) x^m} - 1 \right| = \left| \frac{1}{c(\lambda)} b_0 \left(\frac{1}{x} \right) + \frac{\lambda}{c(\lambda)} b_1 \left(\frac{1}{x} \right) + \cdots + \frac{\lambda^n}{c(\lambda)} b_n \left(\frac{1}{x} \right) \right|,$$

où $b_i(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $b_i(0) = 0$. Pour tout i, $\left| \frac{\lambda^i}{c(\lambda)} \right|$ atteint sa borne supérieure sur le compact $[K, K+1]$, notée M_i. Soit M tel que :

$$x \geq M \Longrightarrow M_0 \left| b_0 \left(\frac{1}{x} \right) \right| + M_1 \left| b_1 \left(\frac{1}{x} \right) \right| + \cdots + M_n \left| b_n \left(\frac{1}{x} \right) \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour $x \geq M$ et $\lambda \in [K, K+1]$:

$$P(x, \lambda x) \geq \frac{x^m}{2} > 0.$$

Or le sous-ensemble $\{(x, \lambda x) | \quad x \geq M, \lambda \in [K, K+1]\}$ de $\mathbb{R}^2$ contient un cercle de rayon 1, ce qui est absurde.

9 Physique Ulm/Lyon/Cachan (06/07)

1. On trouve une propagation dirigée par $\overrightarrow{k_1} + \overrightarrow{k_2}$ avec un terme en $\cos^2(ky \sin\alpha)$ pour l'intensité. L'onde mentionnée est plane car les plans équi-phase sont des plans orthogonaux à la direction de propagation ? $\overrightarrow{e}$ est la polarisation instantanée ? Une onde plane électromagnétique dans le vide est nécessairement transverse-électromagnétique ($div \overrightarrow{E} = div \overrightarrow{B} = 0$). On a $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$? Deux analogies : fentes d'Young et propagation guidée entre deux conducteurs parfaits.
2. On a alors $k = \frac{n\omega}{c}$
3. On écrit que $T - T_{ambiant}$ est proportionnel à l'intensité reçue et on linéarise le cosinus carré.
4. On écrit $T(y,t) = T_{cte} + \Delta T(t) cos(2ky \sin\alpha)$ et on injecte dans l'équation $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \triangle T$ pour trouver une décroissance exponentielle pour $\Delta T(t)$.

5. Il y a diffraction ; la transparence étant un terme de phase : la variation d'indice du milieu est proportionnelle à la température du milieu. La figure de diffraction obtenue (en faisant un développement limité à l'ordre 1) est : tâche centrale avec deux tâches plus petites de part et d'autre.
6. L'intensité des deux tâches plus petites décroît jusqu'à zéro : la mesure du temps caractéristique de décroissance permet de fait de mesurer λ.

10 TIPE (08/07, MM. Côte et Madore)

1. On a :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E[l_n]-2\sqrt{n}}{n^{1/6}} = \alpha \in \mathbb{R}$$
2. Il s'agit de la permutation inverse : $\sigma = \pi^{-1}$. Ce n'est pas immédiat à démontrer. La démonstration donnée dans le livre « The Symmetric Group » de Sagan passe par une interprétation géométrique de la correspondance de Robinson-Schensted inventée par Viennot.
3. D'après la question précédente, c'est le nombre d'involutions de $\mathcal{S}_n$.
4. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ avec $\sigma\circ\sigma = id\}$. En décomposant en cycles à supports deux à deux disjoints, on voit que ces cycles sont tous des transpositions. On regarde ensuite si $\sigma(n) = n$ ou non, et on trouve aisément $I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$.
5. On compte le nombre de permutations qui ont un long cycle en remarquant que si l'on possède un long cycle, alors on n'en possède qu'un seul (pour i entre $n/2$ et n, on choisit un long cycle de longueur i en faisant attention aux permutations circulaires, puis on complète par une permutation à $n-i$ éléments) :
$$P_n = \frac{1}{n!}\sum_{i=n/2}^{n}(n-i)!\frac{n(n-1)\cdots(n+i-1)}{i} = \sum_{i=n/2}^{n}\frac{1}{i}$$
qui tend vers $\ln 2 \simeq 0.693$ lorsque n tend vers l'infini.
6. D'après la question précédente, la stratégie suivante convient : on numérote les mathématiciens de 1 à 100, on note les tiroirs $T_1, T_2, \dots, T_100$.
Le mathématicien i commence par ouvrir la boite T_i. Elle contient le nom du mathématicien j. Il ouvre alors la boite T_j, et ainsi de suite.

11 Physique Ulm (09/07)

On va montrer que le flux de molécules d'eau s'évaporant est plus intense près des coins de la frite. À cet effet, on note n la concentration moléculaire en vapeur d'eau dans le four. En régime permanent, $\triangle n = 0$. Sur le bord de la frite, la pression vaut $P = P_{sat}(T_{four})$, pression de vapeur saturante à la température T_{four}. D'après la loi des gaz parfaits, $n = n_0 = \frac{P_{sat}(T_{four})}{RT_{four}}$ sur le voisinage immédiat de la frite. Il s'agit donc de résoudre l'équation de Laplace $\triangle n = 0$ dans le four, avec la condition aux limites $n = n_0$ sur le bord de la frite.

On se ramène donc à l'étude suivante : on considère un coin d'un conducteur parfait (disons de forme $>$, l'angle intérieur valant θ_0 qui est plus petit que π) porté à un potentiel nul $V = 0$. Que vaut le champ $\overrightarrow{E}$? Dans cette analogie, $\overrightarrow{E}$ est assimilé au flux de molécules d'eau : il s'agit donc de montrer que le champ $\overrightarrow{E}$ est plus intense aux coins. C'est le phénomène bien connu du pouvoir des pointes.

Modélisons cela : –). On se place en coordonnées polaires, de centre l'extremité du coin et d'axe une droite d'un coin. On cherche une solution (non constante) à variables séparées de la forme $V(r,\theta) = f(r)g(\theta)$. Le potentiel étant nul sur le conducteur, $g(0) = g(2\pi - \theta) = 0$. Or :

$$\triangle V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0.$$

D'où :

$$\frac{r(f'(r) + rf''(r))}{f(r)} = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = constante.$$

Vu que $g(0) = g(2\pi - \theta) = 0$, la constante est nécessairement positive ; notons la K^2 pour fixer les idées. On en tire avec cette condition, $K = \frac{n\pi}{2\pi - \theta_0}$. Or de plus :

$$f''(r) + \frac{f'(r)}{r} - \frac{K^2}{r^2}f(r) = 0.$$

Cherchons des solutions sous la forme $f(r) = r^\alpha$. En ré-injectant, il vient $\alpha^2 = K^2$. Vu que le potentiel ne diverge pas lorsque r tend vers 0, nécessairement $\alpha = K$. En définitive, il existe des constantes λ_n telles que :

$$V(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n r^{\frac{n\pi}{2\pi-\theta_0}} \sin\frac{n\pi\theta}{2\pi - \theta_0}.$$

Ainsi, le terme correspondant à $n = 1$ donne un champ suivant $\overrightarrow{e_r}$ de la forme :

$$E_r(n = 1) = -\lambda_1 \frac{\pi}{2\pi - \theta_0} r^{\frac{\pi}{2\pi-\theta_0} - 1} \sin\frac{\pi\theta}{2\pi - \theta_0}.$$

Or $\frac{\pi}{2\pi-\theta_0} - 1 < 0$: ce champ diverge lorsque r tend vers 0. Ainsi, le champ est bien plus intense au voisinage de la pointe.

En définitive, il y a plus de molécules d'eau qui s'évaporent près de la pointe, ce qui fait que la pointe « sèchera » plus vite, et sera donc irrémédiablement cramée.