

# Exercices de Khôlles de physique

*Lycée Louis le Grand, Paris, France*

Igor Kortchemski

MP\*2 - 2006/2007

---

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Semaine 1 - Ondes unidimensionnelles, optique ondulatoire</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Semaine 3 - Interférences, interféromètre de Michelson</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Semaine 5 - Diffraction</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Semaine 7 - Électromagnétisme</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Semaine 9 - Électromagnétisme</b>	<b>4</b>
<b>6</b>	<b>Semaine 11 - Thermodynamique, chimie</b>	<b>5</b>
<b>7</b>	<b>Semaine 13 - Thermochimie, induction</b>	<b>5</b>
<b>8</b>	<b>Semaine 15 - Induction, propagation des ondes électromagnétiques</b>	<b>6</b>
<b>9</b>	<b>Semaine 17 - Propagation des ondes électromagnétiques, chimie</b>	<b>6</b>
<b>10</b>	<b>Semaine 19 - Chimie, filtres, rayonnement dipolaire</b>	<b>7</b>
<b>11</b>	<b>Semaine 21 - Conduction thermique, rayonnement</b>	<b>7</b>
<b>12</b>	<b>Éléments de réponse</b>	<b>9</b>
12.1	Semaine 13 . . . . .	9
12.2	Semaine 15 . . . . .	9
12.3	Semaine 17 . . . . .	9
12.4	Semaine 19 . . . . .	10
12.5	Semaine 21 . . . . .	10

## **1 Semaine 1 - Ondes unidimensionnelles, optique ondulatoire**

Khôlleur: M. Sauvage.

---

**Exercice 1.1** (Ligne bifilaire). Une tranche infinitésimale d'épaisseur  $dx$  d'une ligne électrique bifilaire peut être modélisée par le schéma de la figure 1, comportant une inductance élémentaire  $dL = \Lambda dx$  et une capacité élémentaire  $dC = \Gamma dx$ .

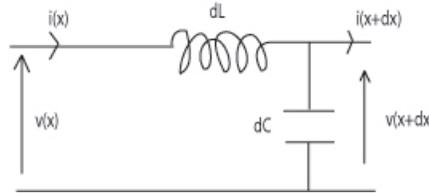


FIG. 1 – Exercice 1.1

1. Justifier que l'on puisse se placer dans le cadre de l'ARQS.
2. Établir deux équations aux dérivées partielles couplées reliant l'intensité  $i(x, t)$  et la tension  $v(x, t)$ . En déduire que ces grandeurs sont solutions d'une équation de d'Alembert unidimensionnelle et exprimer la célérité  $c$  correspondante.
3. Dans le cas d'une onde progressive se propageant selon  $\vec{u}_z$ , montrer que le rapport  $\frac{v(x, t)}{i(x, t)}$  est une constante liée aux caractéristiques de la ligne. Que vaut le même rapport pour une onde progressive se propageant selon  $-\vec{u}_z$ ? On ferme en  $x = 0$  une ligne semi-infinie, s'étendant de  $x = -\infty$  à  $x = 0$  sur une résistance  $R$ ; on néglige les phénomènes de propagation dans  $R$ . À quelle condition une onde progressive peut-elle se propager selon  $\vec{u}_x$  sur cette ligne semi-infinie?
4. Dans le cas où la ligne semi-infinie est fermée en  $x = 0$  par un court-circuit et où une onde progressive harmonique incidente  $v_i(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$  est émise en  $x = -\infty$ , déterminer la tension  $v(x, t)$  et le courant  $i(x, t)$  en tout point de la ligne.

**Exercice 1.2** (Bulle de savon). Juste avant l'éclatement d'une bulle de savon, on observe une kyrielle de différentes couleurs à sa surface. Expliquer pourquoi.

## 2 Semaine 3 - Interférences, interféromètre de Michelson

Khôlleur: M. Lavault.

**Exercice 2.1.**  $S_1$  et  $S_2$  sont deux sources ponctuelles incohérentes. On suppose que l'écran opaque  $E$  élimine seulement toute la lumière directe (voir la figure 2).

Qu'observe-t-on sur l'écran au voisinage du point  $E'$ ? Les deux sources sont monochromatiques, de même longueur d'onde dans le vide notée  $\lambda$ .

Les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  sont supposés parfaits.

**Exercice 2.2** (Dispersion d'un faisceau laser). On considère un faisceau laser se propageant suivant la direction  $(Oz)$  et dont l'amplitude est caractérisée par une distribution normale dans tout plan  $z = \text{constante}$  :

$$a(x, y) = A \exp(-x^2 - y^2).$$

1. Calculer l'amplitude diffractée dans la direction formant un angle  $\alpha$  avec l'axe  $(Oz)$ .
2. Définir et calculer la dispersion angulaire.

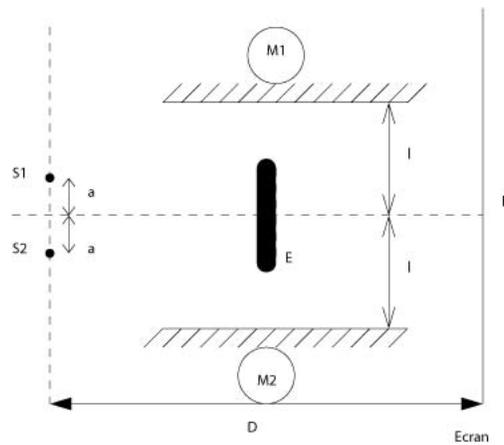


FIG. 2 – Exercice 2.1

### 3 Semaine 5 - Diffraction

Khôlleur: M. Logeais.

**Exercice 3.1.** Comparer les figures de diffraction à l'infini obtenues dans les deux cas suivants (figure 3). Le système est d'extension infinie et peut être étudié comme un réseau idéal.



FIG. 3 – Exercice 3.1

### 4 Semaine 7 - Électromagnétisme

Khôlleur: M. Sauvage.

**Exercice 4.1** (Propriété des lignes de champ). On considère  $N$  charges  $q_1, q_2, \dots, q_N$  réparties sur l'axe  $(Oz)$ . Montrer que l'équation d'une ligne de champ est de la forme :

$$\sum_{i=1}^N q_i \cos(\theta_i) = cte,$$

où les angles  $\theta_i$  sont définis sur la figure 4.

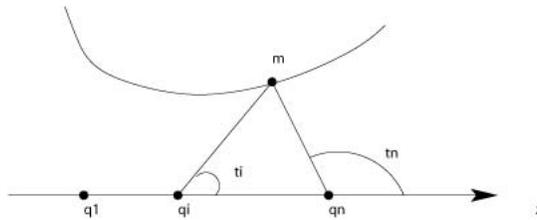


FIG. 4 – Exercice 4.1

**Exercice 4.2** (Sphère émettrice de charges). Une petite sphère radioactive de rayon  $a$ , initialement neutre, émet de façon isotrope par sa surface  $n$  charges  $q$  par unité de temps, avec une vitesse radiale  $\vec{v}$  de norme  $v$  constante.

Déterminer, à un instant  $t$ , la répartition de charges et de courants correspondants.

## 5 Semaine 9 - Électromagnétisme

Khôlleur: M. Lavault.

**Exercice 5.1.** On considère une boule uniformément chargée avec une charge  $Q$ , tournant sur elle-même avec un vecteur de rotation  $\vec{\omega}$ .

1. Calculer le champ magnétique créé au centre de la boule.
2. Calculer le moment magnétique induit.

**Exercice 5.2.** Une sphère  $S$  de rayon  $R$  porte la charge initiale  $Q_0$ .

Son centre est à distance  $d \gg R$  de l'origine. Une autre sphère  $S'$  (identique à  $S$ ) est centrée en  $O$  et posée sur une pointe conductrice reliée au sol par un fil conducteur (voir figure 5).

On déplace  $S'$  jusqu'à l'amener au contact de  $S$ , puis on la ramène dans sa position initiale.

Quelle est la charge portée par  $S'$  après cet aller-retour? Généraliser au cas de  $n$  allers-retours.

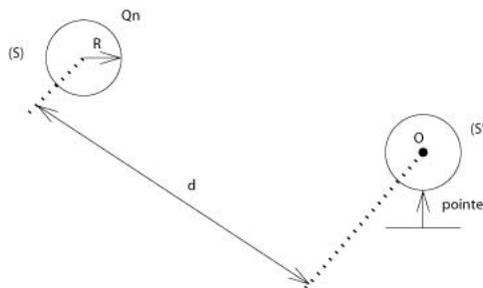


FIG. 5 – Exercice 5.2

**Exercice 5.3.** On considère un condensateur plan dont les armatures sont distantes de  $l$ . L'une des armatures est portée au potentiel nul et la seconde au potentiel  $V_0$ . On introduit dans l'espace inter-armatures une petite sphère de charge  $Q$  et de rayon  $R$  de sorte que la distance entre la sphère et l'armature au potentiel nul soit  $x$ . On suppose que la sphère n'influence pas le condensateur, en ce sens que la répartition surfacique de charges reste uniforme sur les deux armatures.

1. Calculer le potentiel de la sphère en fonction de  $Q$ .
2. Calculer la force exercée sur la sphère.

**Exercice 5.4.** Estimer la différence de potentiel électrique entre la base et le sommet de la tour Eiffel.

## 6 Semaine 11 - Thermodynamique, chimie

Khôlleur: M. Logeais.

**Exercice 6.1.** On considère un tore divisé en deux compartiments, qui contiennent le même gaz. Ce système est placé dans un champ gravitationnel  $\vec{g}$  et thermostaté à la température  $T_0$ . Les piston inférieur est fixe, et le piston supérieur est mobile ; on repère sa position par l'angle  $\theta$  (voir figure ??).

1. Déterminer les positions d'équilibre.
2. Discuter la stabilité des équilibres obtenus.
3. Définir et calculer la capacité thermique du système.

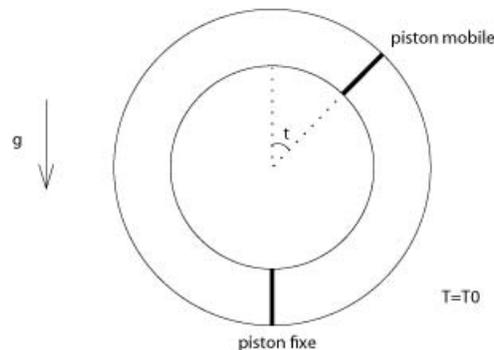


FIG. 6 – Exercice 6.1

## 7 Semaine 13 - Thermochimie, induction

Khôlleur: M. Sauvage.

**Exercice 7.1.** Un dipôle magnétique, de moment dipolaire  $\vec{M}$ , placé en  $O$ , tourne dans le plan  $xOy$  avec une vitesse angulaire constante égale à  $\omega_0$ . Une spire, située dans un plan parallèle à  $yOz$ , dont l'axe est la droite  $(Ox)$ , est à une distance  $D$  du dipôle. Son rayon vaut  $a$ , sa résistance  $R$ , son inductance propre  $L$ .

Déterminer le couple moyen  $\langle \Gamma \rangle$  que l'opérateur doit exercer sur le dipôle pour que la vitesse angulaire demeure constante.

[Solution](#)

## 8 Semaine 15 - Induction, propagation des ondes électromagnétiques

Khôlleur: M. Lavault.

---

**Exercice 8.1** (Question de cours). *Établir la relation de dispersion caractérisant la propagation d'une onde transversale électro-magnétique dans un plasma localement neutre.*

**Exercice 8.2.** *On considère la propagation d'une onde transversale électro-magnétique de pulsation  $\omega$  dans un conducteur infini de conductivité  $\gamma$ , vérifiant  $\gamma \gg \epsilon_0 \omega$ . Établir la relation de dispersion, calculer la vitesse de phase, la vitesse de groupe. Calculer la vitesse de propagation de l'énergie. Commentaires.*

[Solution](#)

---

## 9 Semaine 17 - Propagation des ondes électromagnétiques, chimie

Khôlleur: M. Logeais.

---

**Exercice 9.1.** *On considère une cavité cylindrique de forme arbitraire, taillée à l'intérieur d'un conducteur parfait et d'axe (Oz) (on se place en coordonnées cartésiennes) : voir figure 8.*

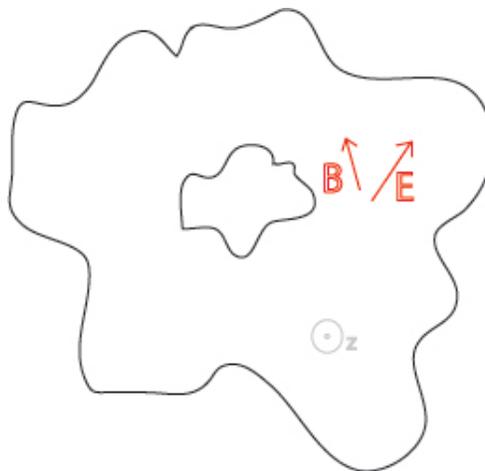


FIG. 7 – Exercice 9.1

On cherche des ondes se propageant à l'intérieur de ce guide sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{e}(x, y)e^{i(kz - \omega t)}, \quad \vec{B} = \vec{b}(x, y)e^{i(kz - \omega t)}.$$

1. Justifier et commenter ces deux expressions. Que peut-on dire sur la forme de cette onde électromagnétique ?

Dans la suite, on cherche un mode transversal électromagnétique : on suppose que  $\vec{e}$  et  $\vec{b}$  n'ont pas de composante suivant  $\vec{u}_z$ .

2. On ne se préoccupe pas (encore) des conditions aux limites. Trouver des relations corrélant  $\vec{e}$  et  $\vec{b}$  (on utilisera l'équation de Maxwell-Faraday).
3. En déduire que  $\vec{e}$  et  $\vec{b}$  sont orthogonaux. Montrer qu'il existe un champ scalaire  $\phi(x, y)$  tel que  $\vec{e} = -\vec{\text{grad}}\phi$ .
4. À quelle(s) relation(s) doit satisfaire  $\phi$  pour que les quatre équations de Maxwell soient vérifiées ? Analogie avec un autre phénomène connu ? Quelle est la relation de dispersion ? Commenter cette relation.
5. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les conditions aux limites soient vérifiées est que  $\phi$  soit uniforme sur la surface des deux conducteurs.
6. Dans le cas où les deux surfaces sont des cylindres de révolution, donner l'expression de  $\phi$ .

Solution

## 10 Semaine 19 - Chimie, filtres, rayonnement dipolaire

Khôlleur: M. Sauvage.

**Exercice 10.1** (Antenne demi-onde). Une antenne filiforme colinéaire à l'axe ( $Oz$ ), de longueur  $L = \frac{\lambda}{2}$ , centrée à l'origine  $O$ , est le siège d'un courant sinusoïdal d'intensité  $\underline{i}(z, t) = I_0 \cos(2\pi \frac{z}{\lambda}) \exp(-j\omega t) = I(z) \exp(-j\omega t)$  avec  $\omega/c = 2\pi/\lambda$ .

1. Calculer le champ électromagnétique rayonné par l'antenne en un point  $M$  situé à une distance  $r$  de l'origine grande devant  $\lambda$ .
2. Calculer la puissance moyenne rayonnée par l'antenne par unité d'angle solide.
3. Sachant que :

$$\int_0^\pi \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} d\theta = 1,22$$

calculer la puissance moyenne totale  $\mathcal{P}$  rayonnée par l'antenne.

4. On définit la résistance de rayonnement de l'antenne par  $\mathcal{P} = R_0 I_{eff}^2$  où  $I_{eff}$  est l'intensité efficace la parcourant. Calculer  $R_0$ .

Solution

## 11 Semaine 21 - Conduction thermique, rayonnement

Khôlleur: M. Lavault.

**Exercice 11.1** (Gel d'un lac). On considère un lac de profondeur  $h$ .

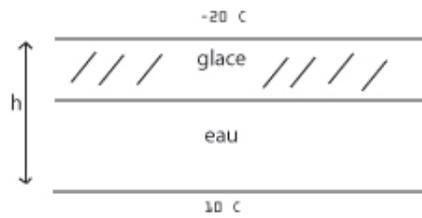


FIG. 8 – Exercice 10.1

1. La température de surface est de  $-20^{\circ}\text{C}$ , celle du fond de  $10^{\circ}\text{C}$ . Décrire le système à l'équilibre thermique.
2. Tout est à l'équilibre à  $10^{\circ}\text{C}$ . La température de surface chute brutalement à  $-20^{\circ}\text{C}$ . Déterminer un temps caractéristique d'établissement de l'équilibre thermique.

Données :

- $\lambda_{\text{eau}} = 0,55 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $\lambda_{\text{glace}} = 2,1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- $c_{\text{eau}} = 4,217 \text{ kJ.kg}^{-1}\text{T}^{-1}$ ,  $c_{\text{glace}} = 2,06 \text{ kJ.kg}^{-1}\text{T}^{-1}$
- $l_f(0^{\circ}\text{C}) = 333 \text{ kJ.K}^{-1}$ .

Solution

**Exercice 11.2** (Effet de serre). La constante solaire  $\Phi_0$ , flux surfacique d'énergie incidente, vaut  $\Phi_0 = 650 \text{ W.m}^{-2}$ .

1. En considérant la Terre comme un corps noir parfait, déterminer la température d'équilibre de la Terre.
2. On modélise l'atmosphère par la superposition de deux couches transparentes au rayonnement solaire mais qui se comportent comme des corps noirs parfaits dans le domaine de l'infrarouge. Déterminer la nouvelle température d'équilibre de la Terre.

Solution

## 12 Éléments de réponse

### 12.1 Semaine 13

**Exercice 7.1.** Analyse physique : le flux du champ magnétique  $\phi$  créé par le dipôle (que l'on peut calculer avec le théorème de Neumann) à travers la spire dépend du temps. Un courant est donc induit dans la spire, qui se calcule en résolvant l'équation différentielle linéaire du premier ordre en  $i$ ,  $-\frac{d\phi}{dt} - L\frac{di}{dt} = Ri$ . Ce courant crée à son tour un champ magnétique  $\vec{B}_i$  au voisinage du dipôle, qui va être par conséquent soumis au couple  $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ . Le couple exercé par l'opérateur est finalement l'opposé de la valeur moyenne de  $\vec{\Gamma}$ .

On trouve (modulo les erreurs de calculs) :

$$\Gamma = \frac{\omega_O R \left(\frac{\mu_0 M}{2aL}\right)^2 \left(\frac{a^2}{a^2 + D^2}\right)^3}{2 \left(\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega_0^2\right)}.$$

Le signe de  $\Gamma$  est bien conforme à la loi de Lenz.

### 12.2 Semaine 15

**Exercice 8.2.** Introduire l'épaisseur de peau  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ . On trouve que la vitesse de phase vaut  $\delta\omega$ , que la vitesse de groupe vaut  $2\delta\omega$  et que la vitesse de propagation de l'énergie (pour le calcul, voir que l'énergie électrique est négligeable par rapport à l'énergie magnétique) vaut  $\delta\omega$ . Conclusion : la vitesse de propagation de l'énergie n'est pas toujours égale à la vitesse de groupe ! C'est ce qui se passe dans ce milieu absorbant.

### 12.3 Semaine 17

**Exercice 9.1.**

1. On reconnaît les expressions d'ondes progressives harmoniques se propageant suivant les  $z$  croissants. L'invariance par translation par rapport à l'axe ( $Oz$ ) conduit à supposer que  $\vec{e}$  et  $\vec{b}$  sont indépendants de  $z$ . Ici, l'onde n'est **PAS** plane : il faut donc faire très attention (en particulier, rien ne nous dit que la relation de dispersion va être  $k = \frac{\omega}{c}$ ) et on ne peut pas écrire  $\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$ .
2. De  $\vec{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  :

$$\begin{vmatrix} -\frac{\partial e_y}{\partial z} \\ \frac{\partial e_x}{\partial z} \\ \frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i\omega b_x \\ i\omega b_y \\ 0 \end{vmatrix}$$

Ainsi :

$$b_x = -\frac{k}{\omega} e_y, \quad b_y = \frac{k}{\omega} e_x, \quad \frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} = 0.$$

3. Il vient  $\vec{e} \cdot \vec{b} = e_x b_x + e_y b_y = 0$  et  $\vec{rot} \vec{e} = \vec{0}$  grâce à ces relations (ne pas oublier que  $\vec{e}$  est indépendant de  $z$ ). En posant  $\vec{e} = -\vec{grad} \phi$ , on a :

$$e_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad e_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

4. La relation de Maxwell-Gauss impose  $\frac{\partial e_x}{\partial x} + \frac{\partial e_y}{\partial y} = 0$ , soit :

$$\Delta\phi = 0.$$

C'est l'équation vérifiée, en électrostatique, par le potentiel dans une région vide de charges.

Les relations de Maxwell-flux et Maxwell-Faraday sont alors vérifiées. L'équation de Maxwell-Ampère fournit finalement (après calculs, où l'on fait attention à la dérivation par rapport à  $z$ ) :

$$\left(k^2 - \frac{w^2}{c^2}\right) \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \quad \left(k^2 - \frac{w^2}{c^2}\right) \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0.$$

Si l'on veut caresser l'espoir de satisfaire aux conditions aux limites, il faut donc :

$$k = \frac{w}{c}.$$

Il n'y a donc pas de dispersion : l'onde se propage sans se déformer, ce qui est sympathique pour transporter de l'information :-).

5. Une condition nécessaire et suffisante est que la composante tangentielle de  $\vec{E}$  soit nulle au niveau de la surface du conducteur, ce qui s'écrit (en un point  $S$  de cette surface)  $0 = \vec{e} \cdot \vec{u}_t = -\overrightarrow{\text{grad}}\phi \cdot \vec{u}_t$ , où  $\vec{u}_t$  est un vecteur unitaire contenu dans le plan  $\Pi$  localement tangent en  $S$  à cette surface. Considérons un petit déplacement  $d\vec{M}$  sur cette surface. Comme  $d\vec{M}$  appartient au plan  $\Pi$  :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\phi \cdot d\vec{M} = 0,$$

ou encore  $d\phi = 0$ . Ainsi  $\phi$  est constante sur ces surfaces.

6. Le laplacien en coordonnées cylindriques d'un champ ne dépendant que de  $r$  s'écrit :

$$\Delta\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\phi}{\partial r} \right).$$

D'où  $\phi(r) = A \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$ .

## 12.4 Semaine 19

**Exercice 10.1.** Analyse physique : un élément de longueur  $dz$ , situé à la cote  $z$ , est assimilé à un dipôle de moment  $d\vec{p}$  vérifiant  $\dot{\underline{i}}(z, t) dz \vec{u}_z = \frac{d(d\vec{p}(z, t))}{dt}$ . On en déduit le champ total rayonné dans la zone de rayonnement en superposant le champ créé par chacun de ces dipôles élémentaires.

## 12.5 Semaine 21

**Exercice 11.1.**

1. Écrire la continuité du flux thermique à l'interface.
2. En supposant que la variation de température est linéaire dans la glace et dans l'eau [hypothèse à vérifier à la fin, le temps caractéristique d'établissement du régime quasi-stationnaire étant  $\tau_i = L^2/K_i$ , où  $K_i = \lambda/\rho c_i$  est la diffusivité thermique], écrire un bilan d'énergie sur le volume de glace se formant à la hauteur  $z$ , la hauteur de glace augmentant de  $dz$  pendant un temps  $dt$ . Par considérations dimensionnelles, en déduire le temps caractéristique  $\tau$ . Il reste à vérifier que  $\tau \gg \tau_i$ ,  $i = \text{glace, eau}$ .

**Exercice 11.2.** Il suffit d'écrire les différents équilibres radiatifs.