Exercices de Khôlles de Mathématiques, troisième trimestre

Lycée Louis le Grand, Paris, France

Igor Kortchemski

HX 2 - 2005/2006

Exercices particulièrement intéressants :
- Exercices 21.2, 21.3, 21.4,
- Exercice 22.1,
- Exercice 24.1,
- Exercice 26.1,
- Exercice 28.1,
- Exercice 29.1,
- Exercices 30.1, 30.2.

Table des matières

21 Semaine 21 - Matrices

Khôlleur: Mlle. Gicquel.

Exercice 21.1 (Question de cours)**.** *Montrer que toute matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r est équivalente à une matrice de type $J_{n,p,r}$.*

Exercice 21.2. *Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension n et f un endomorphisme nilpotent sur E tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Trouver le commutant de f, autrement dit tous les endomorphismes g sur E qui commutent avec f.*

Solution

Exercice 21.3. *Soient p matrices $A_1, A_2, \ldots, A_p$ de $Gl_n(K)$ tels que l'ensemble de ces p matrices soit stable par produit matriciel. Montrer que :*

$$tr\left(\sum_{i=1}^{p} A_i\right) \equiv 0[p].$$

Solution

Exercice 21.4. *Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ de trace nulle.*
1. Montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.
2. Montrer qu'il existe deux matrices X et Y de $M_n(\mathbb{K})$ de trace nulle qui vérifient $A = XY - YX$.

Solution

---

22 Semaine 22 - Calculs de primitives, calculs de rangs, matrices

Khôlleur: Mme. Miquel.

Exercice 22.1 (Oral Ulm)**.** *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.*
On définit une sous-matrice de A de la manière suivante : étant donnés $I \subset [\![1, n]\!]$ et $J \subset [\![1, n]\!]$, la sous-matrice de A correspondante est la matrice $A_{i\in I, j\in J}$ de taille $Card(I) \times Card(J)$.

1. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation. On appelle serpent associé à σ l'ensemble $\{a_{1,\sigma(1)}, a_{2,\sigma(2)}, \dots, a_{n,\sigma(n)}\}$. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :*
   (i) Tous les serpents de A contiennent 0.
   (ii) Il existe une sous-matrice de A de taille $r \times s$ constituée uniquement de zéros.
2. *On suppose que A n'est constituée que de réels positifs ou nuls et que la somme des éléments d'une ligne ou d'une colonne vaut toujours 1. Montrer qu'il existe un serpent non nul.*

Solution

---

23 Semaine 23 - Détérminants

Khôlleur: Mlle. Gicquel.

Khôlle à rattraper.

24 Semaine 24 - Espaces vectoriels normés

Khôlleur: M. Tauzin.

Exercice 24.1. *Soit E un espace de Bananch (c'est-à-dire un evn complet) muni d'une norme $||\cdot||_E$. Soit G un sous-espace vectoriel fermé de E. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence suivante :*

$$x\mathcal{R}y \iff x - y \in G.$$

L'ensemble vectoriel quotient est noté $F = E_{/G}$, et la classe de x est notée $\widehat{x}$.
On définit une norme $||\cdot||_F$ sur F de la manière suivante :

$$||\widehat{x}||_F = \inf_{y \in G} ||x - y||_E.$$

Montrer que $(F, ||\cdot||_G)$ est un Banach.

Solution

---

25 Semaine 25 - Fonctions de deux variables

Khôlleur: Mlle. Gicquel.

Exercice 25.1 (Question de cours)**.** *Montrer qu'une fonction de U, ouvert de $\mathbb{R}^2$, dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 admet un DL en tout point de U à l'ordre 1.*

Exercice 25.2. *Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1, vérifiant pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:*

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + y^2 + \sqrt{x^4+y^4}.$$

Solution

Exercice 25.3 (Question de cours)**.** *Esquisser les étapes de la démonstration du théorème des fonctions implicites.*

---

26 Semaine 26 - Réduction des endomorphismes

Khôlleur: Mme. Miquel.

Exercice 26.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le rayon spectral $\rho(A)$ est le maximum des modules des valeurs propres de A. Montrer l'équivalence suivante :*

$$\text{la suite } (U_k)_{k\geq 1} = A^k \text{ converge vers la matrice nulle} \iff \rho < 1.$$

Solution

---

27 Semaine 27 - Intégrabilité sur un intervalle quelconque

Khôlleur: M. Sage.

Khôlle à rattraper.

28 Semaine 28 - Formes quadratiques, espaces euclidiens

Khôlleur: M. Haddad.

Exercice 28.1. *On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n et une application $\mu :]0,1[\to \mathbb{R}_*^+$, continue et intégrable sur $]0,1[$. On pose, pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$:*

$$(P|Q) = \int_0^1 \mu(x)P(x)Q(x)dx.$$

1. *Montrer que l'on vient de définir un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.*
2. *Montrer qu'il existe une unique famille (P_i) de polynômes telle que :*
   - *P_i soit unitaire de degré i*
   - *la famille (P_i) soit une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.*

3. Montrer que, pour tout i entre 1 et n, P_i admet i racines réelles simples dans $]0,1[$.

Note : l'énoncé initial, quelque peu ténébreux, demandait de « montrer que, pour tout i entre 1 et n, P_i admet i racines dans $]0,1[$ ».

Solution

---

29 Semaine 29 - Groupe orthogonal

Khôlleur: M. Duval.

Exercice 29.1 (Oral Ulm). *Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Montrer que $SO(E)$ est le seul sous-groupe distingué de $SO(E)$. Autrement dit, montrer tout sous-groupe G de $SO(E)$ vérifiant*

$$\forall \phi \in SO(E), \forall g \in G, \quad \phi \circ g \circ \phi^{-1} \in G$$

est forcément $SO(E)$ lui-même.

Solution

---

30 Semaine 30 - Espaces affines

Khôlleur: Mme. Miquel.

Exercice 30.1. *Soit $ABCD$ un tétraèdre dont cinq des côtés ont une longueur inférieure ou égale à 1. Montrer que son volume est inférieur à $\frac{1}{8}$.*

Solution

Exercice 30.2 (Oral Polytechnique). *On se donne un cercle, un diamètre $[AB]$ du cercle et M un point sur le cercle.*

1. *Montrer qu'avec une règle non graduée seule on peut réussir à tracer la droite perpendiculaire à (AB) passant par M (une règle non graduée permet seulement de tracer la droite reliant n'importe quels deux points).*
2. *Montrer qu'avec une règle non graduée seule de longueur égale au rayon du cercle on peut réussir à tracer la droite perpendiculaire à (AB) passant par M (autrement dit, on ne peut pas tracer une droite à partir de deux points dont la distance est supérieure au rayon du cercle).*

Solution

FIN DE L'ANNÉE

31 Éléments de réponse

31.1 Semaine 21

Exercice 21.2 Prendre u tel que $f^{n-1}(u) \neq 0$. Montrer que $(u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u))$ est une base de E. Soit M la matrice representant f dans la base canonique. M est donc équivalente à la matrice A suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poser $B = (b)_{ij} \in M_n(\mathbb{K})$. Écrire que $AB = BA$ bourrinement, en déduire que B est diagonale inférieure, puis que $g \in Vect(Id, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$.

Exercice 21.3. Poser $B = \sum_{i=1}^{p} A_i$. Soit i_0 entre 1 et p, et soit S l'ensemble des p matrices. Voir que

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & S & \rightarrow & S \\ & A & \mapsto & A_{i_0} A \end{array}$$

est bijectif. On a alors $A_{i_0} B = B$. Sommer ces p relations et en déduire que $B^2 = pB$. En déduire que $\frac{1}{p} B$ est une matrice de projection. On a alors :

$$\begin{aligned} tr\left(\frac{1}{p}B\right) &= rg\left(\frac{1}{p}B\right), \\ \frac{1}{p} tr\,(B) &= rg\,(B), \\ tr\,(B) &= p.rg\,(B), \end{aligned}$$

d'où le résultat voulu.

Exercice 21.4.
1. Par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes se ramener au cas où $a_{11} = 0$: réussir à mettre successivement $a_{11} + a_{22}$, $a_{11} + a_{22} + a_{33}$, etc. dans a_{11}.
2. Il suffit de montrer le résultat pour A de diagonale nulle, quitte à appliquer le résultat précédant. Chercher X sous la forme $X = Diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ avec $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$ et Y quelconque. On obtient facilement Y en exprimant $XY - YX$.

31.2 Semaine 22

Exercice 22.1. Il est fondamental de remarquer que l'on peut permuter des lignes entre elles ou des colonnes entre elles sans rien changer.
1. - La réciproque. On suppose par l'absurde qu'il existe un serpent qui ne contienne pas 0. On permute les lignes pour amener les r lignes de la sous-matrice sur les r premières lignes de A. Alors $\sigma(1)$ peut prendre $n - s$ valeurs, $\sigma(2)$ peut prendre $n - s - 1$ valeurs,. . ., $\sigma(r)$ peut prendre $n - s - (r - 1) = n - s - r + 1 = 0$ valeurs, absurde.

- Le sens direct. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$ c'est clair. On suppose le résultat vrai au rang n. Si A est la matrice nulle, c'est bon. Sinon, il existe un élément non nul, qu'on amène par permutation des lignes et des colonnes en $a_{n+1,n+1}$:

$$\left(\begin{array}{c|c} A' & \\ \hline & a \end{array}\right)$$

avec $a = a_{n,n} \neq 0$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence sur la matrice A' de taille $n \times n$, en considérant les serpents qui vérifient $\sigma(n+1) = n+1$. On obtient, après permutation des lignes et des colonnes :

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

avec 0 une matrice $r \times s$ de zéros. La condition $r + s = n + 1$ implique que B est carrée $r \times r$ et que C est carrée $s \times s$. Il en découle que tous les serpents de B contiennent un 0 ou que tous les serpenst de C contient un zéro. Disons C. On applique l'hypothèse de récurrence à C : il existe une sous-matrice $k \times l$ de zéros. On a ainsi obtenu une sous-matrice de zéros de taille $(r + k) \times l$. Or $r + k + l = r + s + 1 = n + 2$, d'où le résultat.

2. Raisonner par l'absurde, permuter les lignes et les colonnes pour transformer la matrice en

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

avec 0 de taille $r \times s$, B de taille $r \times (n - s)$ et C de taille $(n - r) \times s$; On note Σ la somme des éléments de la matrice D. On évalue la somme de tous les éléments de la grande matrice de deux manières : $n = (n - s) + (n - r) - \Sigma$. Or $r + s = n + 1$, d'où $\Sigma = -1$, absurde.

31.3 Semaine 24

Exercice 24.1. Prendre une suite $\widehat{x}_n$ de F de Cauchy. Prendre une extractrice φ vérifiant :

$$||x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}||_F \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Voir que pour tout $\epsilon > 0$, il existe y tel que :

$$||x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)} - y||_E \leq \epsilon.$$

Construire alors une suite y_n telle que :

$$||(x_{\varphi(n+1)} - y_{n+1}) - (x_{\varphi(n)} - y_n)||_E \leq \frac{1}{2^n}.$$

En faisant un petit découpage, voir que $w_n = x_{\varphi(n)} - y_n$ est de Cauchy. Elle converge vers une certain $a \in E$.
Montrer finalement que $\widehat{x}_n$ admet une valeur d'adhérence dans F.

31.4 Semaine 25

Exercice 25.2. Penser à un changement de variable en utilisant les coordonnées polaires : poser

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta$$

(pour $y \neq 0$ ou $x > 0$). Alors :

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

L'équation d'origine s'écrit alors (en notation abusive) :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = r\left(1+\sqrt{\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)}\right).$$

D'où :

$$f(r,\theta) = \frac{r^2}{2}\left(1+\sqrt{\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)}\right) + C(\theta),$$

où C est une fonction de classe C^1 ne dépendant que de θ. Finalement :

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{1}{2}\sqrt{x^4+y^4} + C\left(\theta(x,y)\right),$$

où $\theta(x,y) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. Montrer alors que $\theta(x,y)$ est une constante.
Montrer réciproquement que cette fonction convient : en particulier, montrer que $\sqrt{x^4+y^4}$ est de classe C^1.

31.5 Semaine 26

Exercice 26.1.
Sens direct.
$\mathbb{C}$ étant algébriquement clos, on trigonalise la matrice A en A' et on munie $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme : $\|A\| = \sup\limits_{i,j}|a_{ij}|$. Puisque :

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \text{x} & \cdots & \cdots & \text{x} \\ 0 & \lambda_2 & \text{x} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \text{x} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

où les λ_i sont les valeurs propre de A, on a :

$$\left(A'\right)^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \text{x} & \cdots & \cdots & \text{x} \\ 0 & \lambda_2^k & \text{x} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \text{x} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Comme $(A')^k$ converge vers la matrice nulle pour la norme définie ci-dessus (toutes les normes sont équivalentes en dimension finie), pour tout i entre 1 et n, $|\lambda_i|^k$ tend vers 0, ce qui montre que $|\lambda_i| < 1$ et donc que $\rho(A) < 1$.

Réciproque.

L'idée est d'utiliser la décomposition de Dunford (voir rappel plus loin). En effet, il suffira de montrer le résultat pour n'importe quel bloc dans la matrice diagonale par blocs résultante. Considérons par exemple le premier bloc B_1, de taille α_1 (α_1 est évidemment la dimension du sous-espace caractéristique associé à λ_1). L'intérêt est qu'on va avoir deux matrices qui commutent, de sorte qu'on pourra utiliser la formule du binôme. Plus précisément, on écrit :

$$\begin{aligned} B_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathrm{x} & \cdots & \cdots & \mathrm{x} \\ 0 & \lambda_1 & \mathrm{x} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \mathrm{x} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{x} & \cdots & \cdots & \mathrm{x} \\ 0 & 0 & \mathrm{x} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \mathrm{x} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \qquad\qquad d \qquad\qquad + \qquad\qquad n, \end{aligned}$$

avec d diagonale et n nilpotente d'indice au plus α_1. L'idée est ensuite d'utiliser une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire une norme $|||\cdot|||$ qui vérifie : $|||AB||| \leq |||A||| \cdot |||B|||$, par exemple la norme :

$$|||A||| = \sup_{||X||=1, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} ||AX||,$$

où $||\cdot||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors on a $|||d||| = \lambda_1$ et :

$$\begin{aligned} |||B_1^k||| &= |||(d+n)^k||| \\ &\leq \sum_{i=0}^{k} \left(\binom{k}{i} |||d|||^{k-i} \cdot |||n^k||| \right) \\ &\leq \sum_{i=0}^{\alpha_1} \left(\binom{k}{i} \lambda_1^{k-i} \cdot |||n^i||| \right) \quad \text{car } n \text{ est nilpotente d'ordre au plus } \alpha_1. \end{aligned}$$

Mais pour chaque i, $\binom{k}{i}$ est polynomial en k et λ_1^{k-i} est exponentiel en k. Or par hypotèse $|\lambda_1| < 1$, ce qui montre que $\left(B_1^k\right)$ converge vers la matrice nulle. On fait cela avec tous les autres blocs, ce qui conclut.

Rappel de la décomposition de Dunford.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ représentant f dans la base canonique. Soient $\chi_f(X) = (X-\lambda_1)^{\alpha_1}(X-\lambda_2)^{\alpha_2}\cdots(X-\lambda_r)^{\alpha_r}$ le polynôme caractéristique de f et $N_i(f) = \ker\left((f-\lambda_i id)^{\alpha_i}\right)$ le sous-espace caractéristique de f associé à λ_i. On peut montrer que N_i est stable par f et que $\dim N_i = \alpha_i$. On introduit ensuite :

$$\begin{aligned} f_i : N_i &\to N_i \\ x &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

l'endomorphisme induit par f sur N_i. $f_i - \lambda_i id$ étant nilpotent sur un espace de dimension α_i, on a : $\chi_{f_i}(X) = (x-\lambda_i)^{\alpha_i}$.

Ainsi, $\bigoplus_{i=1}^{r} N_i = E$. Soient $B_1, B_2, \ldots, B_r$ des bases de $N_1, N_2, \ldots N_r$. $B = (B_1, B_2, \ldots, B_r)$ est alors une base de E est $Mat_B f$ est diagonale par blocs. Puisque χ_{f_i} est scindé, on trigonalise f_i et pour chaque B_i on choisit une base de trigonalisation. On obtient finalement la décomposition citée ci-dessus.
Plus généralement, on montre que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit comme somme de deux matrices d et n qui commutent, la première étant diagonale et la seconde nilpotente.

31.6 Semaine 28

Exercice 28.1.
1. La partie la moins facile consiste à montrer : $(P|P) = 0 \Rightarrow P = 0$. Pour cela, supposer qu'il existe $x_0 \in]0, 1[$ tel que $P(x_0) \neq 0$, découper l'intégrale en trois morceaux et conclure.
2. Reprendre le procédé d'orthogonalisation de Schmidt.
3. Raisonner par l'absurde, et considérer le polynôme $Q(X)$, égal au produit des $(X - \lambda_i)$ où les λ_i sont les racines distinctes de P entre 0 et 1 de multiplicité impaire. On a alors $(P|Q) \neq 0$. Mais le degré de Q est strictement inférieur à celui de P. En déduire une contradiction.

31.7 Semaine 29

Exercice 29.1. Les éléments de $SO(E)$ sont les rotations. On note $R_{\overrightarrow{u},\theta}$ la rotation d'axe $\overrightarrow{u}$ et d'angle θ.

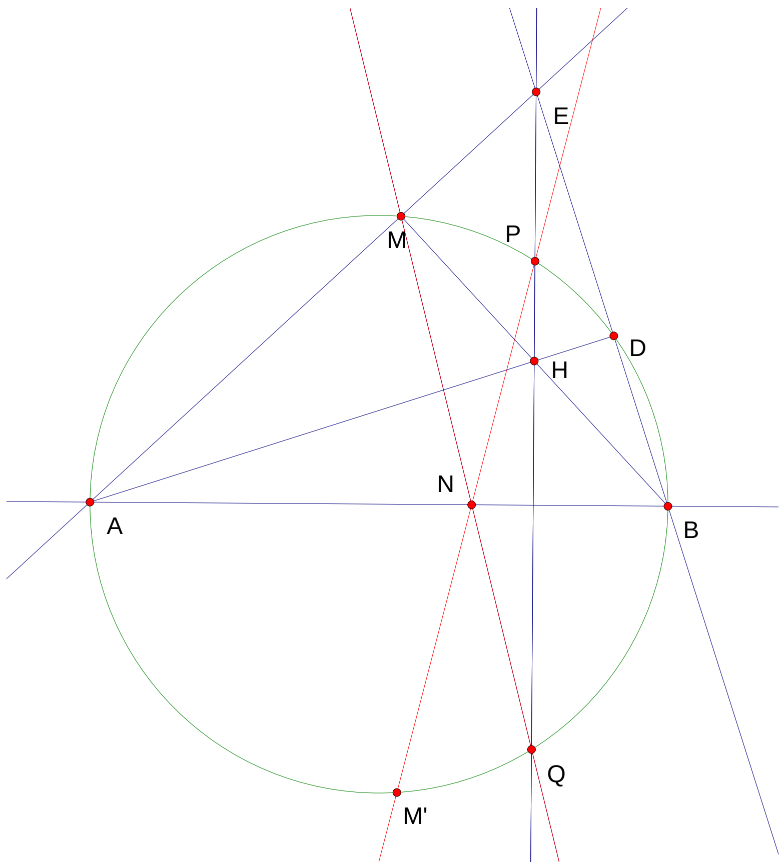
Soit $R_{\overrightarrow{u},\theta}$ un élément de G et $\phi \in G$.
- Montrer que $\phi \circ R_{\overrightarrow{u},\theta} \circ \phi^{-1}$ est la rotation d'axe $\phi(\overrightarrow{u})$ et d'angle $\pm\theta$.
  * $\phi \circ R_{\overrightarrow{u},\theta} \circ \phi^{-1}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} \iff R_{\overrightarrow{u},\theta}\left(\phi^{-1}(\overrightarrow{x})\right) = \phi^{-1}(\overrightarrow{x}) \iff \phi^{-1}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{u}$
  * $\operatorname{tr}\left(\phi \circ R_{\overrightarrow{u},\theta} \circ \phi^{-1}\right) = \operatorname{tr}\left(\phi \circ \phi^{-1} \circ R_{\overrightarrow{u},\theta}\right) = \operatorname{tr}\left(R_{\overrightarrow{u},\theta}\right) = 1 + 2\cos\theta$
- Vu que G est un groupe, G contient toutes les rotations d'angle θ et d'angle $-\theta$ de n'importe quel axe.
- Soit $X = \{\beta \quad | \quad R_{\overrightarrow{u},\beta} \in G\}$. C'est donc un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
- Montrer qu'il existe un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans X en considérant $R_{\overrightarrow{u},\alpha} \circ R_{\overrightarrow{u},\theta} \circ R_{\overrightarrow{u},-\alpha}$ pour $\alpha \to 0$.
- Conclure.

31.8 Semaine 30

1. Soit $[AC]$ le côté qui n'est pas nécéssairement de longueur ≤ 1. Quitte à faire varier D en gardant AD et DB constants, on peut supposer que le projeté de D sur le plan (ABC) apparient à (AB) (cas où la distance de D à (ABC) est maximale).
2. Montrer que si un triangle a des côtés a, b, c de longueur ≤ 1 alors son aire est maximale lorsque $a = b = c = 1$ en montrant d'abord que l'un des côtés vaut 1, puis qu'un deuxième vaut 1.
3. Montrer que la plus grande hauteur d'un triangle de côtés a, b, c de longueur ≤ 1 est atteinte lorsque $a = b = c = 1$.
4. Conclure.

Exercice 30.2.
1. Prendre un point D quelconque sur le cercle. Soit E l'intersection de (AM) et de (BD). Soit H l'intersection de (AD) et de (BM). Puisque $(AD) \perp (EB)$ et $(BM) \perp (AE)$, H est l'orthocentre de ABE. Par conséquent $(EH) \perp (AB)$.

   Soient P et Q les deux intersections de (EH) avec le cercle et N l'intersection de (AB) avec (MQ). Soit M' l'intersection de (NP) avec le cercle. (MM') est la droite cherchée.


E
M
P
D
H
N
A
B
Q
M'