Exercices de Khôlles de Mathématiques, second trimestre

Lycée Louis-Le-Grand, Paris, France

Igor Kortchemski

HX 2 - 2005/2006

Exercices particulièrement intéressants :
- Exercices 12.1, 12.2
- Exercice 13.1
- Exercice 15.1
- Exercice 16.2
- Exercices 19.1, 19.2
- Exercice 20.1

Table des matières

12 Semaine 12 - Espaces vectoriels **2**

13 Semaine 13 - Analyse **2**

14 Semaine 14 - Équivalents et développements limités **3**

15 Semaine 15 - Arithmétique de Terminale et Arithmétique dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ **3**

16 Semaine 16 - Groupe symétrique et séries **4**

17 Semaine 17 - Fractions rationnelles **4**

18 Semaine 18 - Fonctions convexes **5**

19 Semaine 19 - Intégration **6**

20 Semaine 20 - Espaces vectoriels de dimension finie **6**

21 Éléments de réponse **7**
- 21.1 Semaine 12 7
- 21.2 Semaine 13 7
- 21.3 Semaine 14 7
- 21.4 Semaine 15 8
- 21.5 Semaine 16 8
- 21.6 Semaine 17 9
- 21.7 Semaine 18 9
- 21.8 Semaine 19 9
- 21.9 Semaine 20 10

12 Semaine 12 - Espaces vectoriels

Khôlleur: M. Tauzin.

Exercice 12.1 (Théorème de la base incomplète en dimension infinie). *Soit E un ensemble partiellement ordonné. E est dit inductif si toute partie de E non vide et totalement ordonnée (c'est-à-dire une chaîne) possède un majorant. On donne le lemme suivant :*

Lemme de Zorn. *Tout ensemble ordonné E inductif admet un élément maximal (dans le sens où si l'on est plus grand, alors on est égal).*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit L une famille libre de E. On considère :

$$\Gamma = \{K \subset E \,|\, L \subset K \text{ et } K \text{ libre}\}.$$

1. Montrer que Γ est inductif (Γ est evidemment ordonné par l'inclusion).
2. Montrer que un élément maximal de Γ est une base de E.
Soit G une famille génératrice de E. En considérant

$$\Gamma' = \{K \subset E \,|\, L \subset K \subset G \text{ et } K \text{ libre}\},$$

montrer que :
3. E admet une base.

Solution

Exercice 12.2 (Lemme des noyaux). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient P, Q deux élément de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. Soit finalement u un endomorphisme de E. Montrer que :*

$$\ker PQ(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u).$$

Solution

---

13 Semaine 13 - Analyse

Khôlleur: M. Sage.

Exercice 13.1. *Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On note*

$$I_a = \{f \in E \,|\, f(a) = 0\}.$$

1. Soient w_i des ouverts [1] qui vérifient $\bigcup w_i = [0, 1]$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{N} w_i = [0, 1]$.

[1] en gros, voir les ouverts comme des ensembles qui contiennent un intervalle de la forme $]x, y[$

2. Soit I un idéal [2] *strict de E(non réduit à $\{0\}$ ou à E). Montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $I \subset I_a$.*
3. Montrer que les idéaux maximaux [3] *de E sont les I_a.*
4. Trouver tous les morphismes d'algèbre ϕ entre E et $\mathbb{R}$.

Solution

---

14 Semaine 14 - Équivalents et développements limités

Khôlleur: Mme Miquel.

Exercice 14.1. *Trouver le DL de la bête suivante à l'ordre 2 :*

$$\sqrt{\frac{2}{1+e^x}} + \ln(\ln((1+x)^{1/x})).$$

Solution

Exercice 14.2. *Calculer* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cosh(x)) + \ln(\cos(x))}{\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\cosh(x)} - 2}$.

Solution

Exercice 14.3. *Soit (u_n) une suite qui tend vers 0. On suppose que $u_n + u_{2n} \sim \dfrac{3}{2n}$. Montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.*

Solution

---

15 Semaine 15 - Arithmétique de Terminale et Arithmétique dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Khôlleur: M. Duval.

Exercice 15.1. *On cherche à montrer que le produit de k entiers consécutifs n'est jamais un carré parfait.*
1. Traiter le cas $k = 2$.
2. a. Traiter le cas $k = 3$.
b. Montrer que le produit de 3 entiers consécutifs n'est jamais une puissance d'un entier.
3. a. Traiter le cas $k = 4$.
b. Traiter le cas k pair.

[2] I est ici un idéal si I est un sous-groupe additif et que pour tout $f \in E$, $g \in I$ on a $fg \in I$
[3] Un idéal J est maximal si pour tout idéal I, $J \subset I \Longrightarrow J = I$

4. Traiter le cas $k = 5$. On supposera ques les 5 entiers en questions sont a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, on montrera que a_i s'écrit sous la forme $a_i = 2^{\alpha_i} 3^{\beta_i} c_i^2$ avec $\alpha_i, \beta_i \in \{0, 1\}$, puis on regardera le nombre de valeurs que peut prendre (α_i, β_i) pour finalement tôrcher.

On peut procéder ainsi jusqu'à 843. Erdős a montré que le produit de k entiers consécutifs n'est jamais une puissance d'un entier.

Solution

---

16 Semaine 16 - Groupe symétrique et séries

Khôlleur: Mlle. Gicquel.

Exercice 16.1 (Question de cours)**.** *Soit ϵ' défini par :*

$$\begin{array}{rcl} \epsilon' : \mathfrak{S}_n & \to & \{-1, 1\} \\ \sigma & \mapsto & \displaystyle\prod_{i<j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}. \end{array}$$

Montrer que ϵ' est un morphisme de groupes qui coïncide avec le morphisme de groupe ϵ, égal à la signature d'une permutation. On admet que l'image d'une transposition par ϵ vaut -1.

Exercice 16.2. *Soit une série divergente de terme général u_n (il a été précisé 20 minutes plus tard que cette série est à termes positifs ...). Montrer qu'il existe une série divergente de terme général v_n qui vérifie $u_n = o(v_n)$.*

Solution

Exercice 16.3. *Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$. Étudier la nature des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sigma(n)}$ et $u_n = \dfrac{1}{\sigma(n)^2}$.*

Solution

---

17 Semaine 17 - Fractions rationnelles

Khôlleur: Mlle. Gicquel.

Exercice 17.1. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé simple. Trouver le nombre de solutions réelles de l'équation suivante, où $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \lambda.$$

Solution

Exercice 17.2. *Soit $R \in \mathbb{C}(X)$ et $\mathcal{Z}$ l'ensemble de ses pôles. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Trouver le nombre de racines distinctes de $R(z) = \lambda$ sur $\mathbb{C} - \mathcal{Z}$. On essayera d'étudier un peu plus les cas où il y a moins de racines que prévu.*

Solution

Exercice 17.3. *Soit $R \in \mathbb{C}(X)$ non constante. Montrer que R est surjective sur $\mathbb{C}$, sauf éventuellement sur $\mathbb{C}$ privé d'un point.*

Solution

---

18 Semaine 18 - Fonctions convexes

Khôlleur: Mme. Miquel.

Exercice 18.1. *Soit f une fonction convexe sur un intervalle. Montrer que si elle admet un minimum local, alors ce minimum est global* [4]*. Que peut-on dire sur l'ensemble des points où f prend la valeur de ce minimum ?*

Solution

Exercice 18.2. *Soit f une fonction strictement convexe sur un intervalle I. Montrer qu'il existe un intervalle J, non vide et non réduit à un point, tel que f restreinte à J soit strictement monotone.*

Solution

Exercice 18.3 (Oral Ulm)**.** *Soient f et g deux fonctions convexes continues sur $[0,1]$ telles que $\sup(f,g) \geq 0$. Montrer qu'il existe deux réels positifs α et β de somme 1 tels que $\alpha f + \beta g \geq 0$.*

---

[4] Sans utiliser les demi-tangentes...

19 Semaine 19 - Intégration

Khôlleur: M. Tauzin.

Exercice 19.1. *Soit ϕ une application $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ localement intégrable* [5] *et f une application intégrable de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\phi(nt)dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^T \phi(t)dt\right)\left(\int_a^b f(t)dt\right).$$

En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{int}dt = 0.$$

Solution

Exercice 19.2. *Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$. Montrer que (u_n) admet une limite l, la calculer, et trouver un équivalent de $u_n - l$.*

Solution

---

20 Semaine 20 - Espaces vectoriels de dimension finie

Khôlleur: M. Duval.

Exercice 20.1. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On définit la suite (u_n) à valeurs réelles de la manière suivante. $u_0, \ldots, u_{d-1}$ étant donnés, pour tout $n\mathbb{N}$:*

$$u_{n+d} = \frac{1}{d}\left(u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+d-1}\right).$$

1. *Montrer que l'ensemble des suites vérifiant cette condition est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles. Quelle est la dimension de ce sous-espace vectoriel ?*
2. *Montrer que (u_n) converge.*
3. *(hors colle) Calculer cette limite en fonction de $u_0, \ldots, u_{d-1}$.*

Solution

---

[5] intégrable sur tout intervalle

21 Éléments de réponse

21.1 Semaine 12

Exercice 12.1.

1. Montrer que toute chaîne K_I de Γ est majorée par $\bigcup_{i\in I} K_i$.
2. Supposer que ce n'est pas générateur. On peut rajouter un élément à cet élément maximal pour que la nouvelle famille soit libre, contradiction.
3. Le même raisonnement aboutit. Il suffit alors de prendre $L = \emptyset$ et $G = E$.

Exercice 12.2. On remarque d'abord que $P(u)$ et $Q(u)$ commutent. D'après Bézout, il existe R,S tels que $PR+QS = 1$. Alors $P(u)\circ R(u)+Q(u)\circ S(u) = Id_E$. En déduire que $\ker P(u)$ et $\ker Q(u)$ sont disjoints. De plus, soit $x \in \ker PQ(u)$. D'où $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 = \big(P(u) \circ R(u)\big)(x)$ et $x_2 = \big(Q(u) \circ S(u)\big)(x)$. Voir que $x_1 \in \ker Q(u)$ et $x_2 \in \ker P(u)$.

21.2 Semaine 13

Exercice 13.1.

1. Par l'absurde : pour tout N, $[0, 1] \neq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{N} w_i$. Construire une suite X_N de points qui vérifient $X_N \notin \displaystyle\bigcup_{i=1}^{N} w_i$. Conclure avec Bolzano-Weierstrass.
2. Par l'absurde : pour tout $a \in [0, 1]$, $I \not\subset I_a$. Alors pour tout $a \in [0, 1]$, il existe $f_a \in I$ tel que $f_a(a) \neq 0$. En particulier, les f_a sont non nuls autour d'un voisinage w_a, qui est un ouvert. On a alors $\bigcup w_i = [0, 1]$. Il existe alors un recouvrement fini de $[0, 1]$ par $w_{a_1}, \dots, w_{a_n}$. La stûce est de montrer que $1 \in I$ pour montrer que $I = E$. On considère $g(t) = \lambda_{a_1}(t)f_{a_1}(t)+\lambda_{a_2}(t)f_{a_2}(t)+\cdots+\lambda_{a_n}(t)f_{a_n}(t)$, où les $\lambda_{a_i} \in E$. La stûce suprème est de prendre $\lambda_{a_i} = f_{a_i}$. On a alors $g(t) = f_{a_1}(t)^2 + f_{a_2}(t)^2 + \cdots + f_{a_n}(t)^2$, qui est immédiatement non nul sur $[0, 1]$. g admet donc un inverse g^{-1}. Alors $gg^{-1} = 1 \in I$. On a alors $I = E$, absurde.
3. Soit I_a. C'est un idéal. Soit J un idéal qui vérifie $I_a \subset J$. Supposons $J \neq E$. Alors il existe $b \in [0, 1]$ tel que $I_a \subset J \subset I_b$. On a clairement $I_b \neq E$. Or $f(x) = |x - a|$ est telle que $f \in I_a$, mais $f \notin I_b$, absurde. Réciproquement, Soit J un idéal maximal alors il existe $a \in [0, 1]$ tel que $J \subset I_a$. Comme J est maximal, $J = I_a$.
4. $\ker \phi$ est un idéal de E. Il existe $a \in [0, 1]$ tel que $\ker \phi \subset I_a$. Soit δ_a défini par :
$$\begin{array}{rcl} \delta_a : E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(a). \end{array}$$
Alors $I_a = \ker \delta_a$, et $\ker \phi \subset \ker \delta_a$. On suppose que $\phi \not\equiv 0$. ϕ et δ_a étant des formes linéaires, un résultat classique montre qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\delta_1 = \lambda\phi$. En prenant $f \equiv 1$, on obtient $\lambda = 1$. Les solutions sont donc la fonction identiquement et les fonctions de la forme δ_a avec $a \in [0, 1]$.

21.3 Semaine 14

Exercice 14.1. $1 - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{17}{96}x^2 + o(x^2)$.

Exercice 14.2. La limite vaut 8.

Exercice 14.3. Soit $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. On a donc $\lim v_n = 0$ et $\lim n(v_n + v_{2n}) = 0$. A partir d'un certain rang, $|n(v_n + v_{2n})| \leq \epsilon$. Ecrire $|v_n| = |v_n + v_{2n} - (v_{2n} + v_{4n}) + \cdots|$. Alors

$$|v_n| \leq |v_n+v_{2n}|+|v_{2n}+v_{4n}|+\cdots+|v_{2^k n}+v_{2^{k+1}n}|+|v_{2^{k+1}n}| \leq \frac{\epsilon}{n}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^k})+|v_{2^{k+1}n}| \leq \frac{2\epsilon}{n}+|v_{2^{k+1}n}|.$$

Conclure avec $\lim v_n = 0$.

21.4 Semaine 15

Exercice 15.1.

1. Cas $k = 2$: $n(n+1) = p^2$. $n \wedge n+1 = 1$, donc n et $n+1$ sont des carrés distants de 1.
2. a. Cas $k = 3$: $(n-1)n(n+1) = p^2$. Le même raisonnement appliqué suivant la parité de n aboutit.
   b. $n \wedge n^2 - 1 = 1$. n et $n^2 - 1$ sont alors des puissances, conclure.
3. Encadrer l'expression par deux carrés d'entiers consécutifs, plus précisément par deux expressions du type $P(n)^2$ où $P(n)$ est un polynôme à coefficients entiers en n.
4. Cas $k = 5$: voir que seuls les puissances de 2 et de 3 sont problématiques. (α_i, β_i) prend alors 4 valeurs. On a 5 entiers. Appliquer le principe des tiroirs pour voir que deux entiers sont distants de plus de 5.

21.5 Semaine 16

Exercice 16.2. La série étant à termes positifs, $u_n \to +\infty$. En déduire l'existence d'indices $N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots$ qui vérifient pour tout entier l :

$$\sum_{i=N_l}^{N_{l+1}-1} u_i \geq 1.$$

Soit i un indice vérifiant $N_l \leq i < N_{l+1}$. On définit alors v_i par $v_i = \frac{u_i}{l}$. Voir que $v_n = o(u_n)$. Puis :

$$v_{N_l} + v_{N_l+1} + v_{N_l+2} + \cdots + v_{N_{l+1}-1} = \frac{u_{N_l} + u_{N_l+1} + u_{N_l+2} + \cdots + u_{N_{l+1}-1}}{l} \geq \frac{1}{l}.$$

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A \in \mathbb{N}$ tel que :

$$m \geq A \Rightarrow \sum_{i=0}^{m} v_i \geq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i}.$$

Cela prouve la divergence de v_n !

Exercice 16.3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = \max(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$. On en déduit que $m \geq A \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\sigma(i)} \geq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n}$. La première série est donc divergente.
2. Par un argument vaguement similaire, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma(i)^2} \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i^2}$. La deuxième série est donc convergente.

21.6 Semaine 17

Exercice 17.1. Soient $x_1, \ldots, x_n$ les racines de P. Écrire :

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}.$$

En déduire que, sur tout intervalle ne contenant pas un x_i, $\frac{P'(x)}{P(x)}$ est décroissante. Étudier les limites de $\frac{P'(x)}{P(x)}$ en $-\infty$, à gauche et à droite de chaque x_i et en $+\infty$.
Réponse : n si $\lambda \neq 0$, $n-1$ si $\lambda = 0$.

Exercice 17.2. Soit $R = \frac{P}{Q}$. Alors $R(z) = \lambda \Leftrightarrow P(z) - \lambda Q(z) = 0$. Voir que $z \notin \mathcal{Z}$. Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, on a généralement $\max(\deg(P, \deg(Q))$ racines. Dans le cas d'une racine double, $P'(z) - \lambda Q'(z) = 0$ et $P'(z)Q(z) - Q'(z)P(z) = 0$. Voir qu'on peut supposer ce dernier polynôme non nul.

Si $n = \deg(P) = \deg(Q)$, on a généralement n racines, sauf éventuellement si $P(z) - \lambda Q(z)$ n'est plus de degré n ou s'il y a des racines de multiplicité multiple. Poursuivre comme ci-dessus.

On peut aussi considérer les ensembles

$$F_j = \bigcap_{i=0}^{j} \left[\left(\frac{P^{(i)}(z)}{Q^{(i)}(z)} \right)^{(-1)} (\{\lambda\}) \right]$$

et considérer le plus grand entier k tel que $F_k \neq \emptyset$. En effet, la plus grande multiplicité des racines de $P - \lambda Q$ vaut alors $k+1$ et Card F_i donne le nombre de racines de $P - \lambda Q$ de multiplicité au moins $i+1$. On peut alors déterminer le nombre de racines distinctes de $P - \lambda Q$.

Exercice 18.3. Supposer que λ et λ' ne sont pas atteints, écrire les deux conditions et conclure en montrant que R est forcément constante.

21.7 Semaine 18

Exercice 18.1. Il existe a et η tels que $x \in [a - \eta, a + \eta] \Rightarrow f(a) \leq f(x)$. Supposer qu'il existe par l'absurde b, $a < b$ tel que $f(a) > f(b)$.
Premier cas : il existe $x_0 \in]a, a + \eta]$ tel que $f(x_0) > f(a)$. Aboutir sur une contradiction en examinant deux pentes.
Deuxième cas : prendre $x_0 \in]a, a + \eta]$ et faire de même.

Il est alors facile de voir que l'ensemble des points où ce minimum est atteint est convexe, c'est donc un intervalle.

Exercice 18.2. Prendre un intervalle suffisement petit centré en un minimum global de f de sorte que f soit injective sur cet intervalle.

21.8 Semaine 19

Exercice 19.1. Se ramener au cas $\displaystyle\int_0^T \phi(t)dt = 0$ en posant $g(x) = \phi(x) - \displaystyle\int_0^T \phi(t)dt$.

Puis montrer le résultat dans le cas où $f = \chi_{[c,d]}$, c-à-d la fonction caractéristique du segment $[c, d]$. Il suffit alors de montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_c^d \phi(nt)dt = 0$.

Faire un changement de variable, découper le nouveau intervalle en tranches de longeur T, puis majorer sur le bout restant. Conclure par convergence uniforme.

Exercice 19.2.

– C'est une somme de Riemann classique : $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$. u_n converge vers $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$.

– Soit $F(x)$ une primitive de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ de sorte que u_n converge vers $F(1) - F(0)$. Écrire alors :

$$v_n = F(1) - F(0) - u_n = \sum_{k=1}^{n}\left[F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}\right)\right] - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

Soit :

$$v_n = \sum_{k=1}^{n}\left[F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}\right) - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right].$$

Utiliser Taylor-Young et reconnaître une somme de Riemann.

21.9 Semaine 20

Exercice 20.1.

1. Soit S l'ensemble de ces suites. On vérifie que

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & S & \to & \mathbb{R}^d \\ & (u_n) & \mapsto & (u_0, u_1, \ldots, u_{d-1}) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. La dimension du sev est alors d.

2. Considérer $v_n = max(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+d-1})$, $w_n = min(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+d-1})$. Montrer que (v_n) est décroissante et que (w_n) est croissante. Elles sont alors convergentes vers respectivement l_v et l_w. Montrer que $l_v = l_w$ en observant que pour n assez grand, dans tout paquet de d termes consécutifs il y a au moins un élement très proche de l_v. En déduire une majoration de v_n. En déduire que $v_n \leq w_n$. Montrer de même l'autre inégalité.