Exercices de Khôlles de Mathématiques, premier trimestre

Lycée Louis le Grand, Paris, France

Igor Kortchemski

MP*2 - 2006/2007

Table des matières

1 Semaine 1 - Équivalents, développements asymptotiques, séries

Khôlleur: M. Randé.

Exercice 1.1. *Pour un entier n, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. Soit c un réel strictement positif. Montrer que $d(n) = O(n^c)$.*

Solution

Exercice 1.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que $f = \underset{+\infty}{o}(f')$. Montrer que soit f tend vers $+\infty$, soit f tend vers $-\infty$, soit f est identiquement nulle sur un voisinage de $+\infty$.*

Solution

---

2 Semaine 2 - Séries, dénombrabilité

Khôlleur: M. Tosel.

Exercice 2.1. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application vérifiant les propriétés suivantes :*
-i- pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $y \mapsto f(x, y)$ est polynomiale en y,
-ii- pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto f(x, y)$ est polynomiale en x.

1. *Montrer que f est un polynôme à deux variables en x et en y.*
2. *On remplace $\mathbb{R}$ par un corps K. Quelle hypothèse faut-il faire sur K pour que la conclusion précédente subsiste ?*
3. *Montrer que le résultat tombe en défaut si $\mathbb{R}$ est remplacé par $\mathbb{Q}$.*

Solution

---

3 Semaine 3 - Topologie

Khôlleur: M. Duval.

Exercice 3.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.*

1. *Montrer que f est dérivable à droite et à gauche en tout point.*
2. *Montrer que l'ensemble des points où les dérivées à droite et à gauche de f diffèrent est au plus dénombrable..*

Solution

---

4 Semaine 4 - Topologie : compacité

Khôlleur: Mlle. Biolley.

Exercice 4.1. *Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application continue vérifiant :*

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(f(x), f(y)) \geq d(x, y).$$

Montrer que f est bijective et que f est une isométrie.

Solution

---

5 Semaine 5 - Topologie : espaces de Banach

Khôlleur: M. Taïeb.

Exercice 5.1. *Soient (E, N) un espace de Banach de dimension infinie et $K \subset E$ un fermé borné. On suppose que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel V de E de dimension finie tel que :*

$$\forall x \in K, \quad \exists y \in V, \quad N(x - y) < \epsilon.$$

Montrer que K est compact.

Solution

Exercice 5.2 (Application)**.** *Soient $E = \left(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty\right)$ et :*

$$K = \{f \in E, \quad f \text{ est lipschitzienne de rapport } 1 \text{ et } f(0) = 0\}.$$

Montrer que K est compact.

Solution

---

6 Semaine 6 - Connexité, suites de fonctions

Khôlleur: M. Duval.

Exercice 6.1. *Soit ϕ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $E = \left(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty\right)$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme. On définit :*

$$\begin{array}{rcl} \Phi : E & \to & E \\ f & \mapsto & \phi \circ f \end{array}$$

L'application Φ est-elle continue ?

Solution

Exercice 6.2. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$.*

1. *Soit H un hyperplan de E. Montrer que H est fermé ou dense dans E.*
2. *On suppose que E est de dimension finie. Montrer que $E \backslash H$ n'est pas connexe par arcs.*
3. *On suppose que E est de dimension infinie et que H est dense dans E. Montrer que $E \backslash H$ est connexe par arcs.*
   On pourra utiliser le lemme suivant :

   Soient C un convexe de E et $X \subset E$ tels que $C \subset X \subset \overline{C}$. Alors X est connexe par arcs.

Solution

---

7 Semaine 7 - Suites et séries de fonctions, intégration sur un segment

Khôlleur: M. Duminil.

Exercice 7.1. *Soit $E = \left(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty\right)$. Soit $H : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ une application continue vérifiant pour tout $x \in [0,1]$, $H(x,x) = 0$. On pose :*

$$\begin{array}{rcl} T : E & \to & E \\ \varphi & \mapsto & \left(T\varphi : x \longmapsto \inf\limits_{s \in [0,1]} (\varphi(s) + H(x,s))\right) \end{array}$$

Le but de l'exercice est de montrer que T admet un point fixe.

1. *Vérifier que pour $\varphi \in E$, $T\varphi$ est effectivement continue.*
2. *Montrer que T est continue.*
3. *Montrer que pour tout $\varphi \in E$, $T\varphi \leq \varphi$.*

4. *Dans toute la suite, on fixe $\varphi \in E$. Montrer que $(T^n\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une application notée f.*
5. *Montrer que f est continue et que la convergence est uniforme.*
6. *Montrer que f est un point fixe de T.*

Exercice 7.2. *Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que :*

$$\int_0^\pi \cos(t)f(t)dt = 0 \quad et \quad \int_0^\pi \sin(t)f(t)dt = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins deux fois.

Solution

---

8 Semaine 8 - Suites et séries de fonctions, intégration sur un segment, séries entières

Khôlleur: M. Tosel.

Exercice 8.1. *Soit $(a_{k,n}) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}^2}$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n} \leq C.$$

Pour $|x| \leq 1$, on pose :

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n}x^n.$$

On suppose de plus que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers une fonction notée f. Montrer qu'il existe une suite $(a_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Solution

Exercice 8.2. *Soit $c > 0$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continues vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad \int_0^x f^2 \leq c\left(\int_0^x f\right)^2.$$

Solution

---

9 Semaine 9 - Séries entières

Khôlleur: M. Randé.

Exercice 9.1. *Soit k un réel. Montrer que les solutions complexes de l'équation $\tan z = kz$ sont soit réelles, soit imaginaires pures.*

Solution

Exercice 9.2. *On note $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1\}$. Pour $z \in \Delta$, on pose :*

$$f(z) = \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - z^{2^k}\right) \left(= \lim_{n \to \infty} \prod_{i=0}^{n} \left(1 - z^{2^k}\right)\right)$$

Montrer que f est bien définie puis que f est la somme d'une série entière.

Solution

---

10 Semaine 10 - Séries entières - Algèbre générale

Khôlleur: M. Mneimné.

Exercice 10.1. *Trouver tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et les loger dans une maison en les reliant par des ascenseurs. Combien chaque étage a-t-il d'habitants ? Combien d'ascenseurs arrivent sur un sous-groupe ? Combien d'ascenseurs partent d'un sous-groupe ?*

Solution

---

11 Semaine 11 - Groupes, anneaux, corps, polynômes

Khôlleur: M. Taïeb.

Exercice 11.1. *Déterminer* $E = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \quad \forall k \in [\![2, n-1]\!], \quad (k \wedge n = 1) \Rightarrow (k \text{ premier})\}$.

Solution

---

12 Semaine 12 - Algèbe linéaire

Khôlleur: M. Lucas.

Exercice 12.1. *Soient $\mathcal{R}$ un anneau et $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R})$. Montrer que* $\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B)$ *si :*

1. $\mathcal{R} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$,
2. $\mathcal{R}$ *un corps,*
3. $\mathcal{R}$ *est intègre.*
4. *Que se passe-t-il si $\mathcal{R}$ n'est plus intègre ?*

On note ici $\mathrm{Com}(A)$ *la comatrice de A.*

Solution

---

13 Éléments de réponse

13.1 Semaine 1

Exercice 1.1. $\star$ Montrer d'abord que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad \exists\, K_p \in \mathbb{R}^+ \quad \text{tel que} \quad \forall\, \alpha > 0, \quad \alpha + 1 \leq K_p\, p^{c\alpha}.$$

(utiliser le fait que $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \dfrac{\alpha+1}{p^{c\alpha}} \to 0$ et que l'application $\frac{\alpha+1}{p^{c\alpha}}$ est continue sur $[0, M]$.)

$\star$ Décomposer n sous la forme $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_d^{\alpha_d}$ et voir que $d(n) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_d + 1)$. Alors :

$$d(n) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_d + 1) \leq \prod_{i=1}^{d} K_{p_i}\, p_i^{c\alpha_i} = \left(\prod_{i=1}^{d} K_{p_i} \right) n^c.$$

$\star$ Or $\alpha + 1 < p^{c\alpha}$ ssi $\ln(\alpha+1) < c\alpha \ln p$. De plus, si $p > \exp(\frac{1}{c})$, alors $\ln(\alpha+1) < \alpha < c\alpha \ln p$. Par conséquent, si $p > \exp(\frac{1}{c})$, alors $K_p < 1$. On en déduit l'existence de $M > 0$ tel que pour tout $d \geq M$, $\prod_{i=1}^{d} K_i < M$. Le résultat en découle.

Exercice 1.2. Soit $\epsilon > 0$.
$\star$ Supposons que f garde un signe constant sur un voisinage de $+\infty$, disons $f > 0$. Plaçons nous sur un voisinage $V = [M, +\infty[$ vérifiant $x \in V \Rightarrow |f(x)| \leq \epsilon |f'(x)|$. Ainsi f' ne s'annule pas sur V. Quitte à refaire le même raisonnement, on suppose $f' > 0$. Alors $\frac{f}{f'} \to 0^+$, puis $\frac{f'}{f} \to +\infty$. Mais une primitive de $\frac{f'}{f}$ est $\ln f$. Par suite, $\int_0^x \frac{f'}{f} \to +\infty$, ce qui implique $\ln f \to +\infty$ et $f \to +\infty$.

$\star$ Sinon, f s'annule sur tout voisinage de $+\infty$ ce qui permet de construire une suite (x_n) de points vérifiant $\lim(x_n) = +\infty$ et pour tout n, $f(x_n) = 0$. Plaçons nous sur un voisinage $V = [M, +\infty[$ vérifiant $x \in V \Rightarrow |f| \leq \epsilon |f'|$. Soit $i \in \mathbb{N}$. Montrons que f est identiquement nulle sur $I = [x_i, x_{i+1}]$. f est continue sur I et y atteint donc sa borne supérieure (resp. inférieure), disons en a (resp. en b). Alors $f'(a) = 0$ (resp. $f'(b) = 0$). Alors $f(a) = 0$ (resp. $f(b) = 0$). Finalement, pour tout $x \in I$, $f(b) = 0 \leq f(x) \leq 0 = f(a)$, d'où le résultat.

13.2 Semaine 2

Exercice 2.1.
Pour un réel x fixé, on écrit :

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{n_x} a_k(x) y^k.$$

Pour essayer de contrôler le degré, posons $E_N = \{x \in \mathbb{R},\, n_x < N\}$. Alors $\mathbb{R} = \cup_{N \in \mathbb{N}} E_N$. Comme $\mathbb{R}$ est indénombrable, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que E_N soit indénombrable, et a fortiori infini. « Inversons »tout ceci en prenant $y_1, y_2, \ldots y_{N+1}$ $N+1$ réels distincts deux à deux et en écrivant le système :

$$\begin{array}{rcl}
a_0(x) + a_1(x) y_1 + \cdots + a_N(x) y_1^N & = & f(x, y_1) \\
a_0(x) + a_1(x) y_2 + \cdots + a_N(x) y_2^N & = & f(x, y_2) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_0(x) + a_1(x) y_{N+1} + \cdots + a_N(x) y_{N+1}^N & = & f(x, y_{N+1}).
\end{array}$$

On reconnaît un système dont le déterminant est un déterminant de Vandermonde non nul. Le système est alors inversible, et les formules de Cramer montrent que pour $0 \leq i \leq N$, $a_i(x)$ s'écrit comme combinaison linéaire des $f(x, y_j)$, $1 \leq j \leq N+1$. Or ces derniers sont en nombre fini (grâce à notre contrôle de degré) et chacun est un polynôme en x. Par conséquent, chaque $a_i(x)$ est un polynôme en x. On a donc montré que pour tout $x \in E_N$, $f(x,y)$ est un polynôme à deux variables, disons $P(x,y)$.

Pour conclure, raisonnons à y fixé. $f(x,y) - P(x,y)$ est un polynôme en x, admettant une infinité de racines car E_N est infini. Ainsi, $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x,y) = P(x,y)$.

Le point crucial de la démonstration est l'utilisation de la non dénombrabilité de $\mathbb{R}$ (et de son infinitude d'ailleurs).

On numérote les éléments de $\mathbb{Q}$: $Q = \{a_1, a_2, \ldots\}$. On pose successivement :
$f(a_1, y) = f_1(y)$, avec f_1 un polynôme tel que $f_1(a_1) = 0$,
$f(x, a_1) = f_1'(y)$, avec f_1' un polynôme tel que $f_1'(a_1) = 0$,
$f(a_2, y) = f_2(y)$, avec f_2 un polynôme tel que $f_2(a_1) = f_2(a_2) = 0$,
$f(x, a_2) = f_2'(y)$, avec f_2 un polynôme tel que $f_2'(a_1) = f_2'(a_2) = 0$, et ainsi de suite.
$f(x,y)$ ne peut alors pas être un polynôme de deux variables x et y puisque son degré suivant x et y est rendu aussi grand que l'on veut par construction.

13.3 Semaine 3

Exercice 3.1. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, utiliser la croissance de $g : t \mapsto \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{x_0\}$.

On note $f'(x+0)$ (resp. $f'(x-0)$) la dérivée à droite (resp. à gauche) de f en x. Voir que si $x < y$, alors $f'(x-0) < f'(x+0) \leq f'(y-0) < f'(y+0)$. Soit $\mathfrak{D}$ l'ensemble des points de discontinuité de f. Alors :

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \mathfrak{D} & \to & \mathbb{Q} \\ & x & \mapsto & p(x), \quad p(x) \text{ étant un rationnel vérifiant } f'(x-0) < p(x) < f'(x+0) \end{array}$$

est injective, d'où le résultat.

13.4 Semaine 4

Exercice 4.1. Voir que si $m > n$, alors $d(f^{(m)}(x), f^{(n)}(y)) \geq d(f^{(m-n)}(x), y)$. Poser $a_m = f^{(m)}(x)$, $b_n = f^{(n)}(y)$. Extraire des suites convergentes $\left(a_{\phi(m)}\right)$ et $\left(b_{\phi(m)}\right)$ et considérer $a_{\phi(m+1)-\phi(m)}$, $b_{\phi(m+1)-\phi(m)}$.

13.5 Semaine 5

Exercice 5.1. Soit (x_n) une suite d'éléments de K. Montrons qu'elle admet une valeur d'adhérence.

On construit par récurrence $\phi_0, \ldots, \phi_k$ des extractions et $l_0, \ldots, l_k$ des éléments de E tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N(x_{\phi_0 \circ \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_k(n)} - l_k) < \frac{1}{2^k}.$$

Pour $k = 0$. Soit V un sev de E de dimension finie vérifiant la condition de l'énoncé avec $\epsilon = \frac{1}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $y_n \in V$ tel que $N(x_n - y_n) \leq \frac{1}{2}$. La suite (y_n) est ainsi bornée dans un sev de dimension finie car K est borné ; par Bolzano-Weierstrass, soit ϕ une extraction telle que $(y_{\phi(n)})$ converge vers une limite notée l_0. L'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N},\ N(x_n - l_0) < 1\}$$

est par conséquent infini. Soit donc ϕ_0 une injection strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans A.

Supposons $\phi_0, \ldots, \phi_k$ et $l_0, \ldots, l_k$ construits. Soit V un sev de E de dimension finie vérifiant la condition de l'énoncé avec $\epsilon = \frac{1}{2^{k+2}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $y_n \in V$ tel que $N(x_{\phi_0 \circ \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_k(n)} - y_n) \leq \frac{1}{2^{k+2}}$. La suite (y_n) est ainsi bornée dans un sev de dimension finie car K est borné ; par Bolzano-Weierstrass, soit ϕ une extraction telle que $(y_{\phi(n)})$ converge vers une limite notée l_{k+1}. L'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N},\ N(x_{\phi_0 \circ \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_k(n)} - l_{k+1}) < \frac{1}{2^{k+1}}\}$$

est par conséquent infini. Soit donc ϕ_{k+1} une injection strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans A.

Montrons que (l_k) est de Cauchy. Pour $p > n$, on a :

$$\begin{aligned} |l_p - l_n| &\leq |x_{\phi_0 \circ \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_p(0)} - l_p| + |x_{\phi_0 \circ \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_p(0)} - l_n| \\ &\leq \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^n} \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

La suite (l_k) est par suite de Cauchy dans un espace de Banach : elle converge donc irrémédiablement vers une limite notée l.

Montrons que l est une valeur d'adhérence de (x_n) en utilisant le procédé diagonal. Posons $\psi(n) = \phi_0 \circ \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_n(n)$.
Soit N tel que $\frac{1}{2^N} \leq \frac{\epsilon}{2}$ et tel que pour tout $n \geq N$, $|l_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Alors en remarquant que $\left(x_{\psi(N+k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est extraite de $\left(x_{\phi_0 \circ \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_N(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\forall n \geq N, \quad |x_{\psi(n)} - l| \leq |x_{\psi(n)} - l_n| + |l_n - l| \leq \epsilon.$$

K étant fermé, $l \in K$. La suite (x_n) admet donc une valeur d'adhérence dans K, et K est donc bien compact.

Exercice 5.2.
K est clairement borné et fermé : il suffit d'écrire $|f_n(x) - f_n(y)| \leq |x - y|$ et de passer à la limite.

Pour l'existence du sev de dimension finie, on peut invoquer $\mathbb{R}_N[X]$ pour N assez grand en utilisant les polynômes de Bernstein, mais il est plus élémentaire de poser :

$$V_n = \{f \in E,\ f \text{ est affine par morceaux sur la subdivision } \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right) \text{ et } f(0) = 0\}.$$

En effet, en notant $x_i = \frac{i}{n}$ et pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $\phi(x) = \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} f(x_i) + \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} f(x_{i+1})$, on a alors pour tout $x \in [0,1]$, $|\phi(x) - f(x)| < \frac{2}{n}$.

13.6 Semaine 6

Exercice 6.1. Montrons que Φ est continue en « restreignant »le domaine de départ de ϕ afin de pouvoir appliquer l'uniforme continuité.
Soit (f_n) une suite de fonctions de E convergeant vers une fonction $f \in E$. Montrons que $\Phi(f_n) \to \Phi(f)$ en démontrant que $\phi \circ f_n$ converge uniformément vers $\phi \circ f$. Remarquons que la convergence est au moins simple par continuité de ϕ. Fixons $\epsilon > 0$.

La suite $(||f_n||_\infty)$ est bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (||f_n||_\infty \leq M \text{ et } ||f||_\infty \leq M)\,.$$

L'application ϕ est continue sur $I = [-M, M]$. Elle y est donc uniformément continue. Par conséquent, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow |\phi(x) - \phi(y)| < \epsilon.$$

Comme (f_n) converge uniformément vers f, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n > N, \forall x \in [0,1], \qquad |f_n(x) - f(x)| < \eta.$$

Or pour tout $n > N$, pour tout $x \in [0,1]$, on a $f_n(x) \in I$ et $f(x) \in I$. On en tire :

$$\forall n > N, \forall x \in [0,1], \qquad |\phi \circ f_n(x) - \phi \circ f(x)| < \epsilon.$$

Cela conclut.

Exercice 6.2.

1. Il suffit de voir que $\overline{H}$ est un sev de E et qu'il n'y a pas de sev strictement compris entre un hyperplan de E et E.
2. Soit ϕ une forme linéaire telle que $\ker \phi = H$. Puisque E est de dimension finie, ϕ est linéaire. Or $\phi(E \backslash H) = \mathbb{R}^*$. Vu que $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs, $E \backslash H$ ne l'est donc pas.
3. Prouvons le lemme. Soit $x \in X$ et (a_n) une suite d'éléments de C convergeant vers X. On relie x à a_1 par un arc de X : soit $\gamma : [0,1] \to C$ défini par :

$$\gamma(0) = a_1, \quad \gamma\left(\frac{1}{2}\right) = a_2, \quad \dots \quad , \gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) = a_n, \quad \dots \quad , \text{ et } \gamma(1) = x,$$

   et γ affine sur tout intervalle de la forme $[1 - \frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i+1}]$. On vérifie que γ est bien un arc continu de X. On achève la démonstration en invoquant la connexité par arcs du convexe C.

   Soit $u \notin H$. Alors on a :

$$u + H \subset E \backslash H \subset E = \overline{u + H}.$$

   Comme H, et *a fortiori* $u + H$, est convexe, on conclut grâce au lemme.

13.7 Semaine 7

Exercice 7.2. Comme sin est positive sur $[0, \pi]$, f s'annule au moins une fois, disons en x_0. Considérer $g_{\alpha,\beta}(t) = \alpha \cos(t) + \beta \sin(t)$, raisonner par l'absurde et choisir α, β tels que $g_{\alpha,\beta}$ s'annule en x_0, soit positive lorsque f est positive et négative lorsque f est négative.

13.8 Semaine 8

Exercice 8.1. Première étape : en utilisant le procédé diagonal, construire une extraction ϕ telle que pour tout n, $\left(a_{\phi(k),n}\right)$ converge vers une limite notée a_n.

Deuxième étape : vérifier que (a_n) convient. Pour cela, fixer $x \in [0,1[$ et $\epsilon > 0$. Prendre N_0 vérifiant :

$$C\left(x^{N_0+1} + x^{N_0+1} + \cdots\right) \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Prendre K tel que :

$$\forall k \geq K, \forall n, 0 \leq n \leq N_0, \qquad |a_{\phi(k),n} - a_n| \leq \frac{\epsilon}{2C(N_0+1)}.$$

Alors, pour $k \geq K$, en notant $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - f_{\phi(k)}(x)\right| &\leq \left|\sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_{\phi(k),n} x^n\right| + \left|\sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_n x^n\right| + \left|\sum_{n=0}^{N_0} \left(a_{\phi(k),n} - a_n\right) x^n\right| \\
&\leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Exercice 8.2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour tout $x > 0$:

$$c\left(\int_0^x f\right)^2 \geq \frac{1}{x}\left(\int_0^x f\right)^2.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0, \frac{1}{c}]$, on a $\int_0^x f = 0$. En déduire que f est nulle sur $[0, \frac{1}{c}]$.

Poser :

$$Z = \{t \in \mathbb{R}^+ | \quad \forall x \in [0,t], \qquad f(x) = 0\}.$$

Supposer par l'absurde que $M = \sup Z < +\infty$. En reprenant l'idée du raisonnement qui précède, aboutir à une contradiction.

13.9 Semaine 9

Exercice 9.1. Écrire z sous la forme $z = x + iy$, développer $\tan z = \frac{\sin(x+iy)}{\cos(x+iy)}$ en transformant les fonctions circulaires qui contiennent un i en fonctions hyperboliques. Multiplier par la quantité conjuguée le numérateur et le dénominateur. En déduire que si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, alors $\frac{\sin(2x)}{2x} = \frac{\sinh(2y)}{2y}$. Montrer que c'est absurde.

Exercice 9.2. Poser $u_n = \prod_{i=0}^n \left(1 - z^{2^k}\right)$. Pour montrer que u_n converge, effectuer une transformation suite-série et montrer que $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge absolument. Trouver ensuite une équation fonctionnelle vérifiée par f.

13.10 Semaine 10

Exercice 10.1. Il y a autant de sous-groupes que de diviseurs de 20 : plus généralement, pour tout groupe G cyclique d'ordre n, pour un diviseur d de n, il existe un et un seul sous-groupe de G d'ordre d. Ce sous-groupe est alors isomorphe à $\mathbb{Z}/(n/d)\mathbb{Z}$.

13.11 Semaine 11

Exercice 11.1. Montrer que :

$$n \in E \iff \left(\forall p \text{ premier}, p \nmid n \Rightarrow n < p^2\right).$$

Montrer ensuite que le plus petit nombre premier ne divisant pas n est inférieur ou égal à 7 : en notant p_n le n-ième nombre premier, montrer que pour $n \geq 4$:

$$p_1 p_2 \cdots p_n > p_{n+1}^2.$$

Première méthode : utiliser le postulat de Bertrand (il existe un nombre premier compris entre n et $2n$).

Deuxième méthode : voir que tout entier x se décompose sous la forme $x = K^2 y$, où K est un entier et y un entier « quadratfrei », c'est-à-dire divisible par aucun carré (autre que 1). En notant Q_n l'ensemble des entiers « quadratfrei »entre 1 et p_n, construire une injection :

$$\begin{array}{rcl} \Phi : [\![1, p_{n+1} - 1]\!] & \to & [\![1, \sqrt{p_{n+1}}]\!] \times Q_n \\ x = K^2 y & \mapsto & (K, y) \end{array}$$

Voir que $\operatorname{Card} Q_n = 2^n$. En déduire $p_{n+1} \leq 4^n$. Conclure en raisonnant par l'absurde.

13.12 Semaine 12

Exercice 12.1. Ce type de raisonnement est classique.

- Si A et B sont inversibles :

  $$\mathrm{Com}(AB) = \det(AB)^t(AB)^{-1} = \det A \det B({}^tB\,{}^tA)^{-1} = \det A({}^tA)^{-1} \det B({}^tB)^{-1} = \mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B).$$

1. Si $\mathcal{R} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on évoque la densité de $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et la continuité de l'application qui à une matrice associe sa comatrice.
2. Si $\mathcal{R}$ est un corps, on plonge $\mathcal{M}_n(\mathcal{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathcal{R}(X))$, avec $\mathcal{R}(X)$ le corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur $\mathcal{R}$. Voir que $A - XI_n$ et $B - XI_n$ sont inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathcal{R}(X))$.
3. Si $\mathcal{R}$ est un anneau intègre, on le plonge dans son corps des fractions et l'on est ramené à la question précédente.
4. Le résultat reste vrai. Idée de la démonstration : remplacer chaque coefficient par une indéterminée, et considérer l'anneau (intègre) des polynômes en ces $2n^2$ indéterminées.