Dem abrégée (théorème 3). On suppose connu le corps non commutatif des quaternions $\mathbb{H}$ et le groupe G des quaternions de norme 1 (cf Perrin chap VII). En tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\mathbb{H}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^4$, de base $(1, i, j, k)$ vérifiant

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \text{ et } jk = -kj = i \text{ et } ki = -ik = j \text{ et } ij = -ji = k$$

Le groupe G agit par translation à gauche sur $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ par translation, ce qui donne un morphisme φ de G sur $SO(4, \mathbb{R})$, qui à $g \in G$ associe la matrice M_g d'application linéaire $t_g : \mathbb{H} \to \mathbb{H} \ \ h \longmapsto gh$. Explicitement, si $g = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in G$, alors

$$M_{g,1} = \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 & -z_3 & -z_4 \\ z_2 & z_1 & -z_4 & z_3 \\ z_3 & z_4 & z_1 & -z_2 \\ z_4 & -z_3 & z_2 & z_1 \end{pmatrix}$$

L'application φ est injective et $H_1 = \operatorname{Im} \varphi = \{M_g, g \in G\}$ est un sous-groupe de $SO(4, \mathbb{R})$ isomorphe à G. De même, on dispose d'un autre sous-groupe H_2 en considérant la multiplication à droite (ce qui revient à changer le signe de z_2 et z_4 dans les matrices précédentes. On note $M_{1,g}$ la matrice correspondante (où $g \in G$).

On peut faire agir $G \times G$ sur $\mathbb{H}$ par translation à gauche et à droite par

$$\begin{array}{rcl} t : G \times G & \to & SO_4(\mathbb{R}) \\ (g_1, g_2) & \longmapsto & M_{g_1, g_2} : \mathbb{H} \to \mathbb{H} \ \ h \longmapsto g_1 h g_2 \end{array}$$

On montre (cf [aP] chap VII § 2) que $\operatorname{Im} t = SO_4(\mathbb{R})$ et $\operatorname{Ker} t = \{(1,1), (-1, -1)\}$.

La surjectivité de t permet de conclure aisément que H_1 et H_2 sont des sous-groupes distingués de $SO_4(\mathbb{R})$. Montrons pae exemple que H_1 est distingué. Il suffit de noter que, pour tout $(g_1, g_2) \in G \times G$ et pour tout $g \in G$, on a

$$M_{g_1, g_2} M_g M_{g_1, g_2}^{-1} = M_{g_1, g_2} M_g M_{(g_1)^{-1}, (g_2)^{-1}} = M_{g_1 g (g_1)^{-1}, 1} \in H_1$$

Les sous-groupes H_1 et H_2 contiennent $Z = \{-I, I\}$ (on prend $g = (\pm 1, 0, 0, 0)$). On en déduit que $PSO_4(\mathbb{R})$ admet deux sous-groupes distingués H_1/Z et H_2/Z, qui sont isomorphes à $G/\{-1, 1\}$.

En passant t au projectif, on obtient une action $T : G \times G \to PSO(4, \mathbb{R})$, dont on peut prouver que $\operatorname{Ker} T = \{-1, 1\}^2$ (c'est-à-dire $\operatorname{Ker} T = \{(1,1), (-1,1), (1,-1), (-1,-1)\}$). On en déduit que

$$PSO_4(\mathbb{R}) \sim G \times G/\{-1, 1\}^2 \sim (G/\{-1, 1\})^2$$

Pour conclure, on utilise une autre action de G sur $\mathbb{H}$. En effet, d'après [aP] chap VII § 2), G agit de façon naturelle par automorphisme intérieur sur l'espace P des quaternions purs (orthogonal de $\mathbb{R}$) qui s'identifie naturellement à l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. On obtient ainsi un morphisme $s : G \to SO_3(\mathbb{R})$, dont on peut montre que $\operatorname{Im} s = SO_3(\mathbb{R})$ et $\operatorname{Ker} s = \{-1, 1\}$. On en déduit que

$$G/\{-1, 1\} \text{ est isomorphe à } SO_3(\mathbb{R})$$

On en déduit finalement que

$$PSO_4(\mathbb{R}) \sim G \times G/\{-1, 1\}^2 \sim SO_3(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})$$

Comme $SO_3(\mathbb{R})$ est simple, on en déduit que les seuls sous-groupes distingués non triviaux de $SO_3(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})$ sont $SO_3(\mathbb{R}) \times \{I\}$ et $\{I\} \times SO_3(\mathbb{R})$. En effet, si G est un sous-groupe distingué et si $(u, v) \in G$ avec $u \neq I$, alors G contient les éléments de la forme $(wuw^{-1}, v)(u^{-1}, v^{-1}) = (wuw^{-1}u^{-1}, I)$ donc contient $SO_3(\mathbb{R}) \times \{I\}$.

Remarques : 1) Il n'est pas nécessaire dans la démonstration d'expliciter les groupes H_1 et H_2.

2) On peut en déduire que les seuls sous-groupes distingués non triviaux de $SO_4(\mathbb{R})$ sont le centre et H_1 et H_2. La preuve est donnée dans [aMT] page ??? en admettant que tout sous-groupe distingué est fermé.

3) On peut d'autre part prouver que $SO_4(\mathbb{R})$ est isomorphe au produit semi-direct de G et de $SO_3(\mathbb{R})$.

4) Le groupe G est isomorphe à la sphère S^3 de $\mathbb{R}^4$, ce qui munit S^3 d'une structure de groupe topologique. Les seules sphères munies de telles structures sont $S^0 = \{-1, 1\}$, $S^1 \sim U$ et $S^3 \sim G$, ces structures étant liées à la structure des corps $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$.

18 Relation d'Euler dans un triangle

ENONCÉ DES PROPRIÉTÉS

Théorème (formule d'Euler). Soit ABC un triangle non aplati. On note R le rayon et O le centre du cercle circonscrit, r le rayon et I le centre du cercle inscrit au triangle ABC. On note d la distance OI. Alors

$$R^2 = d^2 + 2rR$$

Remarque : Lorsque $d = 0$, les médiatrices de ABC sont aussi les bissectrices, donc le triangle est équilatéral, et le cercle inscrit est l'image du cercle circonscrit par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{-1}{2}$.

Principe de la preuve : On vérifie d'abord que $R > d$. En vertu du lemme 1 énonçé ci-dessous, prouver la formule d'Euler consiste à montrer que $s = \frac{1}{2}r$, ce qui est une façon beaucoup plus élégante d'énoncer la formule d'Euler.

Par la construction géométrique de l'image d'un point par l'inversion f (cf annexe 1), on prouve que le cercle circonscrit au triangle $f(A)f(B)f(C)$ est l'image du cercle inscrit par une homothétie de rapport $\frac{-1}{2}$.

…nme 1 : On note f l'inversion par rapport au cercle inscrit (cf annexe 1). L'image par f du cercle circonscrit est un cercle …e rayon

$$s = \frac{Rr^2}{R^2 - d^2}$$

Remarque : On propose une autre démonstration de la formule d'Euler en annexe 2.

DÉMONSTRATIONS.

Dem (lemme 1). On considère les points M et N du cercle circonscrit appartenant à la droite (OI). Les poins M et N se trouvent de part et d'autre de I, et on a $OM = R + d$ et $ON = R - d$. On en déduit que $f(M)$ et $f(N)$ se trouvent sur (OI) de part et d'autre de I, et que

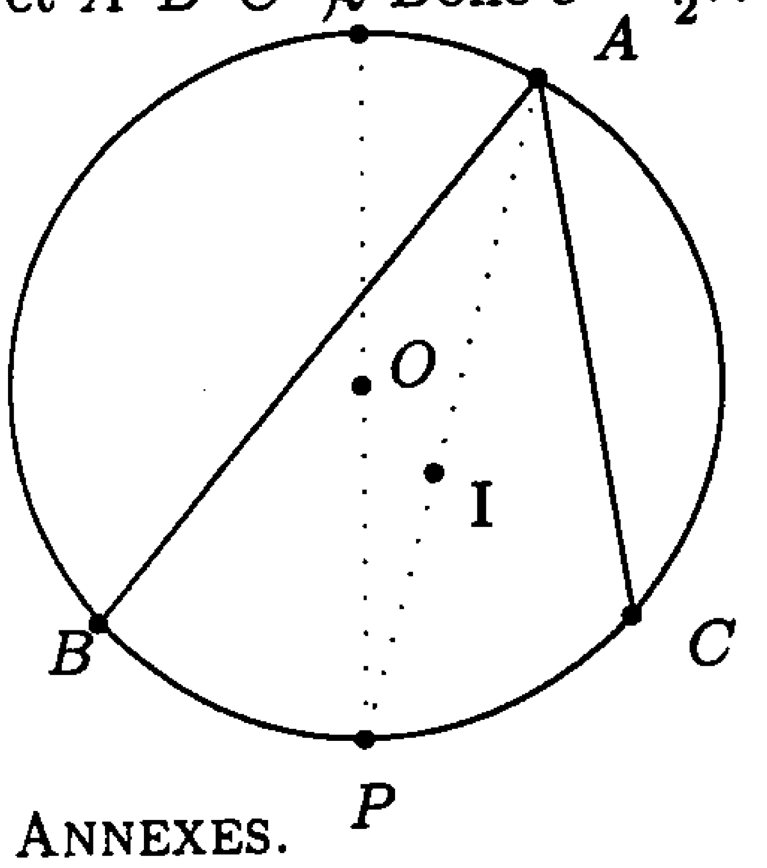
$$f(M)f(N) = \frac{r^2}{(R+d)} + \frac{r^2}{R-d} = \frac{2Rr^2}{R^2 - d^2}$$

On sait que l'image du cercle circonscrit par f est un cercle (cf annexe 1) de diamètre $f(M)f(N)$. D'où le résultat.

Dem (théorème). Commençons par noter que $R > d$. En effet, le triangle ABC est intérieur au cercle circonscrit, donc I est strictement intérieur au cercle circoncrit, donc $R > d$.

En reprenant les notations du lemme 1, prouver la formule d'Euler consiste à prouver que $s = \frac{1}{2}r$, ce qui est une façon beaucoup plus élégante d'énoncer la formule d'Euler.

Notons A', B', C' les images de A, B, C par f. Notons A'', B'', C'' les points de contact du cercle inscrit avec les droites (BC), (AC) et (AB). Compte tenu de la construction géométrique de l'image d'un point par une inversion (cf annexe 1), A' est le milieu du segment $[B''C'']$, et de même pour les autres. Donc le cercle circonscrit à $A'B'C'$, qui est l'image de ABC par f, est aussi l'image du cercle inscrit par une homothétie de rapport $\frac{-1}{2}$ (dont le centre est le centre G commun aux triangles $A'B'C'$ et $A''B''C''$). Donc $s = \frac{1}{2}r$. Ce qui permet de conclure.



ANNEXES.

Annexe 1 : Inversion dans le plan euclidien par rapport à un cercle.

Soit Γ un cercle de centre I. On définit l'inversion de centre I et de rapport $k > 0$ comme l'application f qui à tout point M du plan distinct de O, associe le point $N = f(M)$ appartenant à $[IM)$ et défini par $IM.IN = k$.

On définit l'inversion par rapport à Γ comme l'inversion (de centre I) qui laisse Γ invariant, c'est-à-dire l'inversion de centre I et de rapport $k = r^2$, où r est le rayon de Γ.

Si on identifie le plan euclidien d'origine I et $\mathbb{C}$, l'inversion f de centre I et de rapport k s'écrit

$$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \quad z \longmapsto \frac{k}{\overline{z}}$$

En fait, la bonne façon de voir une inversion est de la considérer comme la composée d'une homographie du plan projectif $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, et d'une symétrie (à savoir $z \longmapsto kz^{-1}$ et $z \longmapsto \overline{z}$). On en déduit alors (par le cours de géométrie projective) que l'image d'un cercle (ou une droite) est un cercle (ou une droite) selon que I appartienne au cercle (ou à la droite). Cette propriété peut aussi se prouver à l'aide des nombres complexes, ou bien en utilisant la notion de puissance par rapport à un point.

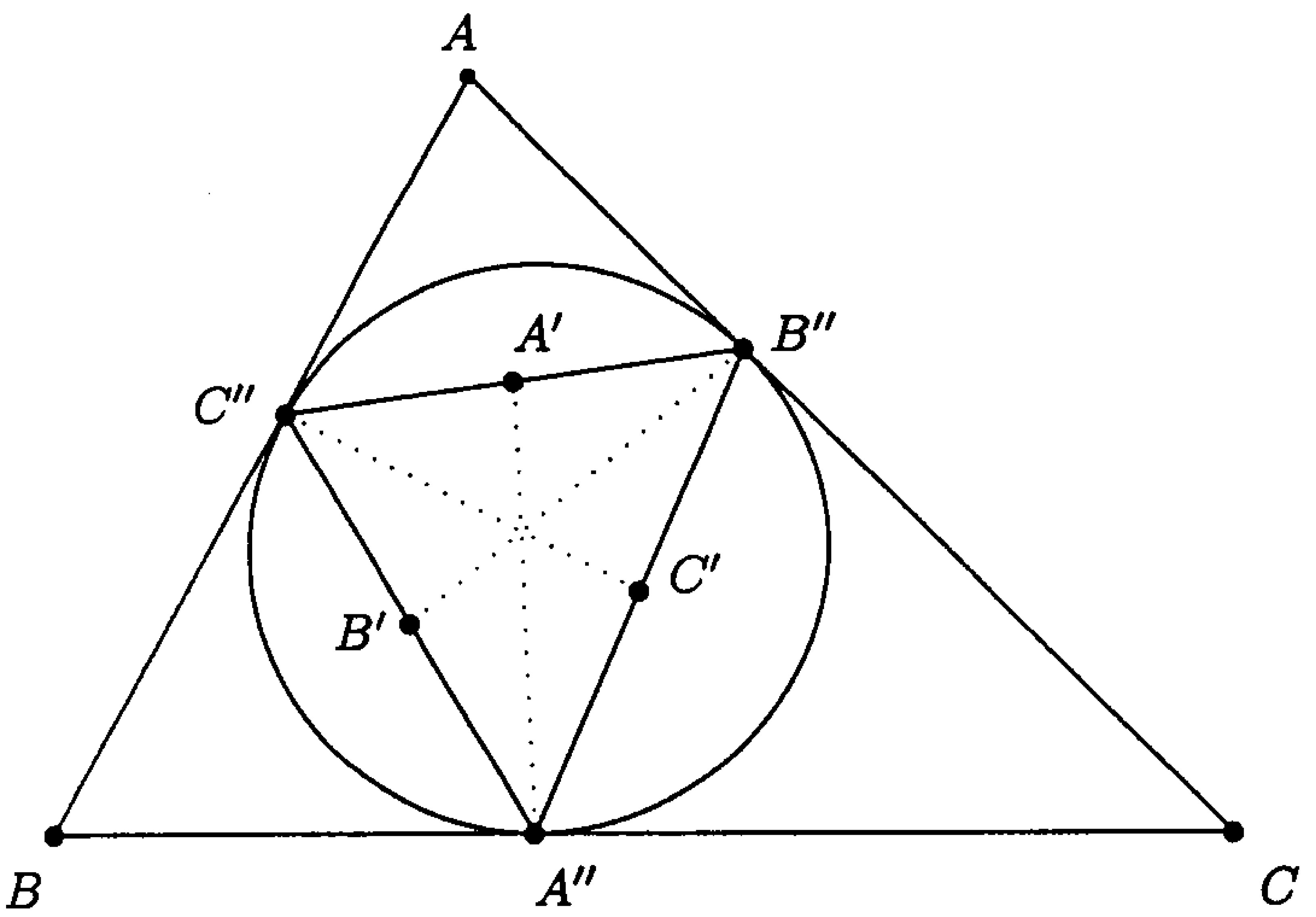
On propose enfin une construction géométrique de l'image d'un point par rapport à une inversion.

Prop : Soit f l'inversion par rapport au cercle Γ. Soit M un point du plan extérieur à Γ. Considérons les deux tangentes à Γ passant par M, et P et Q leurs points de contact avec Γ. Alors $f(M)$ est le milieu de $[PQ]$.

Dem (prop) : Notons N le milieu de $[PQ]$. Le point N est le projeté orthogonal de P sur (AI). Les triangles API et APB sont semblables (ils ont deux angles égaux, donc les trois), d'où $IN.IM = IP^2 = r^2$, ce qui prouve que $N = f(M)$.

Remarque : Comme f est une onvolution, On en déduit une construction de l'image d'un point N intérieur au cercle. La droite passant par N et orthogonale à (ON), qui coupe le cercle en deux points P et Q. Les tangentes au cercle en P et Q s'intersectent en $M = f(N)$.

Annexe 2. Autre démonstration de la relation d'Euler.



On suppose connues les conditions de cocyclicité (cf ???). Avec les notations de l'énoncé, on note P le point d'intersection de la droite (IA) et du cercle circonscrit à ABC. On note Q le point diamétralement opposé à P sur le cercle. Comme les droites (IA) et (AQ) sont orthogonales, alors

$$\omega = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{IQ}.\overrightarrow{IP} = (\overrightarrow{IO} - \overrightarrow{OP}).(\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OP}) = R^2 - OI^2$$

Autrement dit, ω est la puissance de I par rapport au cercle circonscrit à ABC. Notons α l'angle en A dans ABC. Comme I est le centre du cercle inscrit, alors

$$IA = \frac{r}{\sin(\alpha/2)}$$

Les points A, B, P, Q sont cocycliques, donc l'angle $\widehat{BQP}$ est égal, modulo π, à l'angle $\widehat{BAP}$, qui vaut $\frac{1}{2}\alpha$ par définition de I. Comme le triangle BPQ est rectangle en B, alors

$$BP = 2R\sin\alpha$$

Or, par le lemme ci-dessous, on a $IP = BP$. Comme I est intérieur au cercle circonscrit, alors $\omega < 0$. On en déduit que $\omega = -IA.IP = -2rR$. D'où le résultat.

Lemme : Le triangle IBP est isocèle en P.

Dem (lemme) : En utilisant la définition de I, on a :

$$\widehat{BIP} = \pi - \widehat{AIB} = \widehat{ABI} + \widehat{BAI} = \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{CAB}) = \widehat{IBC} + \widehat{CAP}$$

Comme les points A, B, C, P sont cocycliques, et que C et P appartiennent au même arc délimité par A et B, alors

$$\widehat{CAP} = \widehat{CBP} \text{ donc } \widehat{BIP} = \widehat{IBC} + \widehat{CBP} = \widehat{IBP}$$

Donc le triangle IBP est isocèle en P.

Remarque : On en déduit $BP = IP = CP$, donc la droite (PQ) est la médiatrice de $[BC]$.

19 Grand théorème de Poncelet pour les cercles

ENONCÉ DES PROPRIÉTÉS.

Une présentation générale du théorème de Poncelet est proposée au thème 20.

Théorème : Soient dans le plan orienté $\mathbb{R}^2$ deux cercles Γ et C, tels que C est intérieur à Γ. Etant donné un point $M \in \Gamma$, on construit une ligne polygonale (dirigée dans le sens direct autour de C) dont les sommets appartiennent à Γ et dont les segments sont tangents à C. Si pour un des points de Γ, la ligne polygonale se referme au n-ième segment, alors il en est de même de tout point de Γ.

Remarque : L'énoncé est proche de celui de l'alternative de Steiner (cf ???), dont la preuve simple est souvent donnée dans les cours de géométrie projective. Mais la démonstration du théorème de Poncelet est plus compliquée. Ci-dessous, on donne d'abord une démonstration simple dans le cas particulier $n = 3$.

Démonstration dans le cas particulier $n = 3$: On suppose connue la relation d'Euler (cf thème 18). S'il existe un triangle inscrit dans Γ et circonscrit à C, alors $R^2 = OI^2 + 2rR$. Supposons cette condition réalisée. Il s'agit de prouver qu'étant donné un point $a \in \Gamma$, il existe un triangle passant par a, inscrit dans Γ et circonscrit à C. Considérons les deux tangentes à c issues de a, et notons b et c les points d'intersections de ces tangentes avec Γ. Ainsi, le triangle abc est inscrit dans Γ. Notons C_0 le cercle inscrit du triangle abc. Notons Δ la bissectrice de abc en a. Par définition de b et c, le centre du cercle C appartient