Nombres complexes.

Partie I. Exercices.

1) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$. On pose $\forall t \in \mathbb{R}\ \ f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kt)$.
a) Montrer qu'il existe un polynôme P à coefficients complexes tel que $\forall t \in \mathbb{R}\ \ f(t) = e^{-int}P(e^{it})$.
b) On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}\ \ \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kt) = 0$. Montrer que tous les a_k sont nuls (pour $k \in \{0, 1, ..., n\}$).

2) Soient $z_1, z_2, ..., z_n$ des nombres complexes non nuls, avec $z_k = \rho_k \exp(i\theta_k)$, où $\rho_k \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_k \in \mathbb{R}$.
Montrer que $|\sum_{k=1}^{n} z_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\rho_k)^2 + 2\sum_{k<l} \rho_k\rho_l \cos(\theta_k - \theta_l)$. En déduire que $|\sum_{k=1}^{n} z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum_{k=1}^{n} |z_k| = |\sum_{k=1}^{n} z_k|$. Justifier votre réponse.

3) a) On pose $j = e^{2i\pi/3} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer $|a + bj|^2$ en fonction de a et b.
En déduire que si $a^2 + b^2 > 2$, alors $\lim_{n\to+\infty} |a + bj|^n = +\infty$.
b) On définit $A = \mathbb{Z} + j\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres complexes de la forme $z = a + jb$, avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.
Représenter schématiquement A (dans le plan complexe). Montrer que A est stable par multiplication et par conjugaison.
Soit $z \in A$. On dit que z est inversible dans A ssi il existe $z' \in A$ tel que $zz' = 1$, c'est-à-dire ssi $\frac{1}{z} \in A$.
Montrer que $z \in A$ est inversible dans A ssi $|z| = 1$. En déduire tous les éléments de A inversibles dans A.

4) a) Pour $z = a + ib$, on pose $e^z = e^a e^{ib}$. Déterminer le module et l'argument de e^z.
L'application exp : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*\ \ z \longmapsto e^z$ est elle injective ? surjective ? bijective ?
b) Résoudre l'équation $e^z = -2$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
c) Résoudre l'équation $e^z + e^{-z} = -1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

5) a) Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to U \setminus \{-1\}$ définie par $f(t) = \dfrac{1+it}{1-it}$ est bien définie et bijective.
On déterminera en particulier l'unique antécédent par f de $z = e^{i\theta}$, où $\theta \not\equiv \pi[2\pi]$.
b) On suppose n entier naturel impair. En uitlisant a), déterminer les réels $t \in \mathbb{R}$ tels que $\left(\dfrac{1+it}{1-it}\right)^n = 1$.
Justifier que ce sont les racines du polynôme $P(t) = (1 + it)^n - (1 - it)^n$.
c) En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \tan^2(\frac{k\pi}{n})$.

Indications : a) En utilisant les formules $e^{i\theta} - 1 = ...$ et $e^{i\theta} + 1 = ...$, montrer que $f(t) = e^{i\theta}$ ssi $t = \tan(\frac{1}{2}\theta)$.
c) En posant $P(t) = at^n + bt^{n-2} + ...$, montrer que le quotient $\frac{b}{a}$ vaut $\frac{-1}{2}n(n - 1)$.
Justifier que la somme des carrés des racines de P vaut $\frac{-2b}{a}$. Conclure.

6) a) Soit $n \geq 2$. Montrer que la somme des n racines n-ième de l'unité est nulle, c'est-à-dire $\sum_{z\in U_n} z = 0$.
Interpréter géométriquement cette propriété en faisant intervenir le barycentre du polygone régulier associé.
b) On pose $\theta = \frac{2\pi}{5}$ et $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{5})$. En utilisant a), montrer que $1 + 2\cos(\theta) + 2\cos(2\theta) = 0$.
c) En déduire la valeur de $\cos\theta$.

7) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}\ \ s_n = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + ... + e^{in\theta}$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.
Terminologie : On dit que la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ssi $\exists M \in \mathbb{R}^+\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ |z_n| \leq M$.

8) Cherchons une CNS sur α et $\beta \in \mathbb{C}$ pour que les racines de $X^2 + \alpha X + \beta$ soient de même module.
On note u et $-u$ les racines carrées de $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$.
a) Exprimer les racines du polynôme $P = X^2 + \alpha X + \beta$ en fonction de α et de u.
b) Montrer que les assertions suivantes suivantes sont équivalentes (montrer $(i) \Leftrightarrow (ii)$, $(ii) \Leftrightarrow (iii)$, $(iii) \Leftrightarrow (iv)$) :

(i) les racines de P ont le même module.
(ii) α et u sont orthogonaux.
(iii) $|\alpha|^4 - 4\overline{\alpha}^2\beta \in \mathbb{R}^-$
(iv) α^2 et β sont colinéaires de même sens et $4|\beta| \geq |\alpha|^2$

Indication : Pour prouver $(i) \Leftrightarrow (ii)$, montrer que $|\alpha - u|^2 = |\alpha + u|^2$ ssi $\alpha\overline{u} + u\overline{\alpha} = 0$, c'est-à-dire ssi $\mathrm{Re}(u\overline{\alpha}) = 0$.

9) Soit $z \in \mathbb{C}$. On considère A, M, N les points du plan d'affixes i, z et iz.
a) Déterminer l'ensemble C des points M tels que les points A, M, N sont alignés.
b) Donner une preuve géométrique en utilisant la condition de cocyclicité.

10) Soit A, B et C des points du plan d'affixes a, b et c.
a) Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct ssi $c - a = e^{i\pi/3}(b-a)$.
b) En déduire que le triangle ABC est équilatéral ssi $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

11) *Similitudes directes dans un plan. La propriété de la question a) est au programme.*
Soient A, B, A', B' quatre points du plan. On suppose $A \neq B$ et $A' \neq B'$.
a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe f telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.
Indication : Noter a, b, a', b' les affixes de A, B, A', B' (après avoir identifié $\mathcal{E}$ et $\mathbb{C}$ par le choix d'une base orthonormée). Poser $f(z) = \alpha z + \beta$, et se ramener à un système de deux équations aux inconnues α et β. Vérifier que la solution obtenue (α, β) convient, c'est-à-dire que $\alpha \neq 0$.
b) Donner une CNS sur A, B, A', B' pour que f soit une translation.
c) On suppose que f n'est pas une translation, et que f est la similitude de centre I, de rapport k et d'angle θ.
Montrer que $\mathrm{angle}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta\ [2\pi]$.
d) On suppose que les droites (AB) et $(A'B')$ sont sécantes au point J. Que peut-on dire de f sinon ?
Montrer que $\mathrm{angle}(IA, IA') = \mathrm{angle}(JA, JA') = \mathrm{angle}(IB, IB') = \mathrm{angle}(JB, JB') = \theta[\pi]$.
En déduire une construction géométrique de I.

12) Soit $\omega = e^{2i\pi/p}$, avec $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $s_n = \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^n$, avec $s_0 = 0$.
a) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $s_n = 0$.
b) Montrer que $s_0, s_1, \ldots, s_{p-1}$ forment les sommets d'un polygone régulier à p sommets inscrit dans un cercle dont on donnera le centre et le rayon. Faire un schéma avec $p = 6$.
Indication : Montrer que s_n est l'image de ω^n par une similitude directe $f : z \longmapsto az + b$ (indépendante de n).

13) a) Trouver les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n - \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n = 0$.

b) Montrer que dans ce cas $\sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{2k+1} \frac{(-1)^k}{3^k} = 0$.

Partie II. Problèmes.

A. Majoration des racines complexes d'un polynôme.

On considère $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$, avec $a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$.

On pose $R = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left|\frac{a_k}{a_n}\right|$ et $S = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{a_k}{a_n}\right|$.

a) Montrer que toute racine complexe de P est de module inférieur ou égal à $\max(1, S)$,
c'est-à-dire que si $P(z) = 0$, alors $|z| \leq \max(1, S)$.
b) On cherche à donner une majoration voisine (et souvent meilleure que la précédente).
Montrer que toute racine complexe de P est de module inférieur ou égal à $1 + R$.

Indication : a) b) On suppose $P(z) = 0$. Si $|z| \leq 1$, immédiat. On suppose $|z| > 1$. Lorsque $|z|$ est grand, le terme prépondérant de $P(z)$ est $a_n z^n$, donc on obtient une majoration de $|z|$ en écrivant que $|a_n z^n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k z^k|$.
Pour a), majorer $|z^k|$ par $|z^{n-1}|$. Pour b), utiliser une somme géométrique de raison $|z|$ ou $1/|z|$.

B. Résolution de l'équation du troisième degré par la méthode de Cardan.

On pose $j = e^{2i\pi/3}$.

1) On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Montrer qu'en effectuant un changement de variable simple de la forme $x = z - \alpha$, avec α bien choisi,, on est ramené à résoudre une équation de la forme

$$(E) : z^3 + pz + q = 0$$

où p et q sont des nombres complexes. On s'intéresse désormais à la résolution de (E).

2) a) Soient u et v des nombres complexes. Montrer que si $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{1}{3}p \end{cases}$, alors $z = u + v$ vérifie (E).

b) On considère z_1 et z_2 les racines de l'équation : $z^2 + qz - \dfrac{p^3}{27} = 0$.

Soit u une racine cubique de z_1, c'est-à-dire vérifiant $u^3 = z_1$.

Montrer qu'il existe v une racine cubique de z_2 telle que $uv = -\frac{1}{3}p$.

En déduire que les nombres complexes $u + v$, $uj + vj^2$ et $uj^2 + vj$ sont solutions de (E).

3) En appliquant la méthode précédente, déterminer trois solutions de l'équation : $z^3 - 3z - 1 = 0$.

On explicitera les solutions en fonction de la fonction cosinus et du réel $\theta = \frac{\pi}{9}$.

C. Calcul de la somme des inverses des carrés d'entiers.

On rappelle qu'un polynôme P de degré n à coefficients réels ou complexes admet au plus n racines, et que s'il admet n racines distinctes $x_1, ..., x_n$, alors $P(X) = \lambda(X - x_1)...(X - x_n)$, où λ est le coefficient dominant de P.

1) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k^2}$. Le but de l'exercice est de déterminer la limite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Montrer que $S_n \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} \right)$. En déduire que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 2, et que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

2) On définit $\mathrm{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Préciser son ensemble de définition et montrer que $\mathrm{cotan}' = \dfrac{-1}{\sin^2}$.

Justifier que le graphe de cotan est l'image du graphe de tan par une transformation simple qu'on précisera.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n tel que, pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$P_n(\mathrm{cotan}^2 t) = \frac{\sin((2n+1)t)}{(\sin t)^{2n+1}}$$

Indications : Utiliser la formule de Moivre pour développer $\sin((2n + 1)t)$. On trouvera finalement :

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^n C_{2n+1}^{2k+1} (-1)^k X^{n-k}$$

b) Montrer que les racines de P_n sont les $x_k = \mathrm{cotan}^2(\frac{k\pi}{2n+1})$, avec $1 \leq k \leq n$.

c) Montrer que $x_1 + ... + x_n = \frac{1}{3}n(2n - 1)$.

4) a) Montrer que pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\mathrm{cotan}^2 t \leq \dfrac{1}{t^2} \leq 1 + \mathrm{cotan}^2 t$.

Indication : Se ramener à des inégalités plus simples, qu'on montrera par de brèves études de fonctions.

b) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k^2}$. Déduire des questions précédentes que $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{6}\pi^2$.

D. Etude d'une homographie du plan complexe.

On note H le demi-plan de Poincaré, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive. On note U le cercle unité du plan, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes de module 1.

1) a) Pour $z \in H$, on considère $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$. Montrer que $\mathrm{Im}(f(z)) = \dfrac{2\,\mathrm{Im}\, z}{|z+1|^2}$.

b) Montrer *avec soin* que f est une bijection de H sur H.

2) On note V le demi-cercle intersection de U et H. Déterminer son image par f.

Indication : Utiliser une représentation paramétrique de V.

3) a) Montrer qu'il existe α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $f(z) = \alpha + \dfrac{\beta}{z+1}$.

b) Montrer que f peut s'écrire comme la restriction à H de la composée de fonctions de la forme

$$z \longmapsto \frac{1}{z}, \quad z \longmapsto z + K \quad \text{et} \quad z \longmapsto \alpha z,$$

où K et $\alpha \in \mathbb{R}$.

4) a) On considère l'application $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \quad z \longmapsto \dfrac{1}{z}$.
Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan, distincts de l'origine, d'affixes respectives a, b, c, d.
On suppose que A, B, C, D sont cocycliques ou alignés.
Montrer qu'il en est de même des points d'affixes $g(a), g(b), g(c), g(d)$.

b) Soient A, B, C, D quatre points distincts du demi-plan H.
Montrer que si A, B, C, D sont cocycliques ou alignés, il en est de même des points d'affixes $f(a), f(b), f(c), f(d)$.

Partie III. Exercices d'oraux.

1) (X PC) Soient a et b deux nombres complexes de module < 1. Montrer que $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| < 1$.

2) (extrait de IIE)
Soient $a, b, x_1, x_2, .., x_n \in \mathbb{C}$ et le système linéaire (S) : $x_{i+1} = ax_i + b$, avec $1 \leq i \leq n$ et $x_{n+1} = x_1$.
a) Etudier la transformation $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \longmapsto az + b$. Que peut-on dire de f^k, pour $k \in \mathbb{N}$?
b) Résoudre et discuter (S).

3) (Centrale PSI) Soient A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.
a) Montrer que A, B, C et D sont cocycliques ou alignés ssi $\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\dfrac{z_D - z_C}{z_D - z_B} \in \mathbb{R}$.

b) On considère les fonctions homographiques de la variable complexe de la forme $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ et l'ensemble $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, tel que $h(-\frac{d}{c}) = \infty$ et $h(\infty) = \frac{a}{c}$ quand $c \neq 0$ et $h(\infty) = \infty$ sinon.
Montrer que les fonctions homographiques sont bijectives sur $\overline{\mathbb{C}}$.
c) Soient A, B, C et D quatre points du plan et φ une homographie du plan.
Montrer que A, B, C et D sont alignés, alors $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$ et $\varphi(D)$ le sont aussi.
Indication : On pourra commencer par le vérifier pour les fonctions $z \longmapsto 1/z$, $z \longmapsto z + K$ et $z \longmapsto \alpha z$.
d) Soient (z_1, z_2, z_3) et (z'_1, z'_2, z'_3) deux triplets d'affixes de points non alignés.
Montrer qu'il existe une unique homographie h telle que $h(z_i) = z'_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.

4) a) (extrait de Mines de Sup MPSI) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (4+3i)z + 5i = 0$.
b) (extrait de Mines de Sup MPSI) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 4\sqrt{2}(i-1)$.

$= \dfrac{a-b}{a-c} \times \dfrac{d-c}{d-b}$

$\dfrac{\varphi(c)-\varphi(b)}{\varphi(a)-\varphi(c)} \times \dfrac{\varphi(d)-\varphi(c)}{\varphi(d)-\varphi(b)}$