ORAUX : COMBINATOIRE

Le premier exercice voit apparaître la célèbre suite de Fibonacci. Léonard de Pise, plus connu sous le nom de Leonardo Fibonacci est un des rares mathématiciens du Moyen Âge qui soit passé à la postérité. C'est dans le Liber Abacci, *écrit en 1202, qu'apparaît la suite qui porte son nom. Cet ouvrage remarquable, qui a introduit l'usage des chiffres arabes en Europe, réunissait presque toutes les connaissances en arithmétique et en algèbre de l'époque. La suite de Fibonacci a révélé par la suite de multiples propriétés extraordinaires. On la rencontre aussi bien en botanique en comptant les pétales des fleurs ou les écailles des ananas (c'est la phyllotaxie), que sur les marchés financiers où les analystes graphiques essaient de s'en servir pour prévoir l'amplitude des mouvements de hausse ou de baisse d'une action (ratio de Fibonacci). Elle apparaît dans l'exercice suivant, qui fournit un premier exemple de situation combinatoire où l'on utilise un raisonnement par récurrence. De telles situations se rencontrent chaque fois qu'il est possible de construire les configurations de rang n à partir de configurations de rang inférieur, ce qui est fréquent en combinatoire. Historiquement, c'est d'ailleurs pour donner une preuve solide de la formule des combinaisons (donnant la valeur de C_n^k) que Pascal a formulé pour la première fois de façon claire le principe de la démonstration par récurrence.*

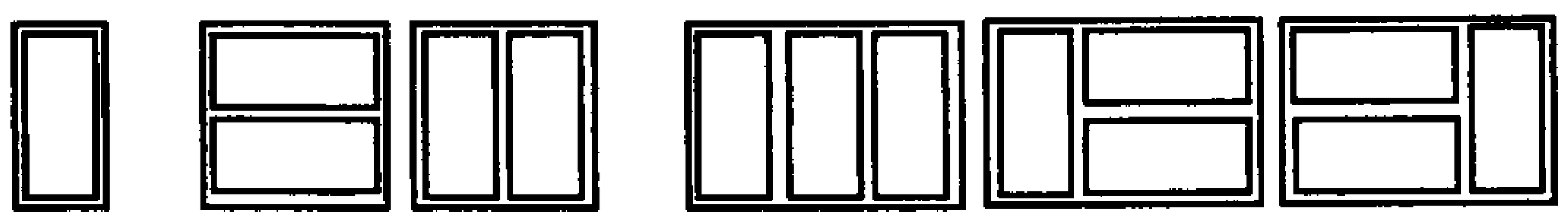
1.1. Nombres de Fibonacci

> Déterminer le nombre a_n de manières de recouvrir un damier de dimension $2 \times n$ avec des pièces de dimension 1×2. Montrer que si n est assez grand, a_n est la partie entière de $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.
>
> **(École polytechnique)**

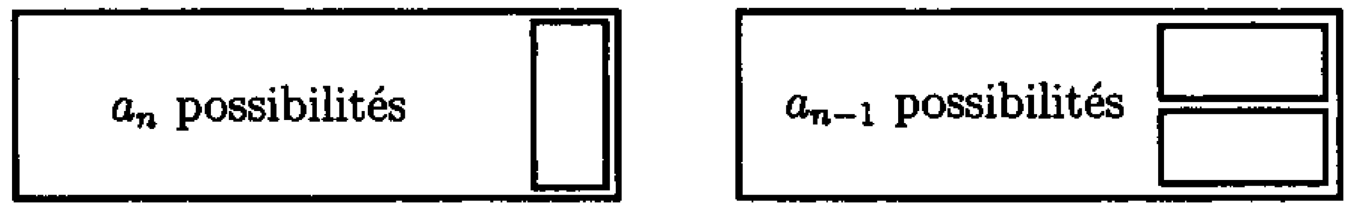
▷ **Solution.**

On va effectuer ce dénombrement en établissant une relation de récurrence. Les configurations ci-dessous montrent que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ et $a_3 = 3$.

$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$



On partitionne l'ensemble des dispositions dans un échiquier de taille $n+1$ selon que la case $(1, n+1)$ est recouverte par un domino vertical ou horizontal. Dans le premier cas il reste à recouvrir un échiquier de taille $2 \times n$ ce qu'on peut faire de a_n manières. Dans le second cas, le domino qui recouvre la case $(2, n+1)$ est lui aussi horizontal et on a a_{n-1} possibilités de recouvrir l'échiquier $2 \times (n-1)$ restant.



La suite (a_n) vérifie donc la relation de récurrence $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. On peut poser $a_0 = 1$ et on reconnaît alors, à un décalage d'indice près, la suite de Fibonacci. L'équation caractéristique associée à cette suite récurrente linéaire est $x^2 - x - 1 = 0$ et ses racines sont $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, le nombre d'or[1] et $-\dfrac{1}{\Phi}$. On obtient alors, en tenant compte des conditions initiales, la formule[2]

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n+1} - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right). \end{aligned}$$

Comme $u_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - a_n$ tend vers $\dfrac{1}{2}$, la partie entière de u_n est nulle pour n assez grand. Or celle-ci vérifie l'égalité

$$\mathrm{E}(u_n) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) - a_n.$$

D'où le résultat de la seconde question. ◁

Nous abordons maintenant le classique problème des dérangements posé pour la première fois en 1708 par Pierre Rémond de Montmort dans son livre Essai d'analyse sur les jeux de hasard *: si n personnes quittant une réunion, prennent au vestiaire un parapluie au hasard, quelle est la probabilité pour que personne n'ait son propre parapluie ? Nous allons aborder ce problème de plusieurs manières différentes. Le premier énoncé en propose une résolution élémentaire.*

1. Ainsi noté en l'honneur du grec Phidias (v^e siècle avant notre ère) qui décora notamment le Parthénon.
2. Dite formule de Binet (1843) mais injustement dénommée puisque Euler l'avait déjà découverte en 1765.

1.2. Nombre de dérangements (1)

nb de partitions paires que impaires

> 1. Calculer $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_n^k C_{n-k}^{p-k}$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$.
>
> 2. Soit D_n le nombre de permutations de $\mathcal{S}_n$ n'ayant pas de point fixe. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} C_n^k D_{n-k} = n!$ (on pose $D_0 = 1$).
>
> 3. Montrer que $D_n = n!\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)$.
>
> **(École polytechnique)**

▷ **Solution.**

1. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_n^k C_{n-k}^{p-k} &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \frac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!(p-k)!(n-p)!}\\ &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_n^p C_p^k\\ &= C_n^p(1-1)^p = \begin{cases} 0 \text{ si } p \geqslant 1\\ 1 \text{ si } p = 0\end{cases}\end{aligned}$$

2. Soit $n \geqslant 1$. Notons P_k l'ensemble des permutations de $\mathcal{S}_n$ ayant exactement k points fixes. Il est clair que $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ est une partition de $\mathcal{S}_n$. En particulier $n! = \sum_{k=0}^{n}\operatorname{Card}(P_k)$. Nous allons montrer que $\operatorname{Card}(P_k) = C_n^k D_{n-k}$ pour tout k. On a par définition $\operatorname{Card}(P_0) = D_n$ et $\operatorname{Card}(P_n) = 1 = C_n^n D_0$, car seule l'identité possède n points fixes. Pour $k \geqslant 1$, un élément de P_k est parfaitement déterminé par le choix de ses points fixes (C_n^k possibilités) et par le choix de la permutation induite sur les $n-k$ éléments restants (D_{n-k} possibilités puisque cette permutation est un dérangement d'un ensemble à $n-k$ éléments). Remarquons en passant que $D_1 = 0$ et que effectivement P_{n-1} est vide : une permutation ne peut avoir exactement $n-1$ points fixes ! On a donc

$$\boxed{n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_k}.$$

3. On part du membre de droite de l'égalité demandée. On a

$$n!\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (n-k)! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \sum_{p=0}^{n-k} C_{n-k}^p D_p$$

en remplaçant le terme $(n-k)!$ par la formule obtenue dans la question 2. En échangeant l'ordre de sommation, on obtient grâce à la question 1,

$$n!\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right) = \sum_{p=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n-p}(-1)^k C_n^k C_{n-k}^p\right) D_p = D_n. \triangleleft$$

Une seconde possibilité, pour aboutir directement à cette dernière relation, consiste à utiliser la formule du crible (celle-ci est rappelée dans la solution de l'exercice 4.32). En effet, si on note U_i l'ensemble des permutations de $\mathcal{S}_n$ fixant l'entier i, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $D_n = n! - \operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right)$. Le cardinal de la réunion s'évalue alors facilement à l'aide de la formule du crible. Nous invitons le lecteur à achever ce calcul.

Dans l'exercice suivant, l'utilisation des séries entières fournit une troisième voie pour inverser le système linéaire donné par les relations de la question 2 ci-dessus et obtenir la formule de la question 3.

1.3. Nombre de dérangements (2)

> On note toujours D_n le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments n'ayant pas de point fixe.
>
> 1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} C_n^k D_k$.
>
> 2. On considère la série entière $\sum_{k\geqslant 0}\frac{D_k z^k}{k!}$, (on l'appelle série *génératrice exponentielle* de la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$). On note D sa somme. Minorer son rayon de convergence R. Calculer $D(z)$ pour $|z| < R$.
>
> 3. En déduire que D_k est la partie entière de $\frac{k!}{e} + \frac{1}{2}$.
>
> **(École polytechnique)**

▷ **Solution.**

1. Voir la solution dans l'exercice précédent : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k D_k = n!$.

2. On a évidemment $0 \leqslant \frac{D_k}{k!} \leqslant 1$, donc le rayon de la série entière définissant $D(z)$ est supérieur ou égal à 1.

Pour calculer $D(z)$ on utilise la relation précédente. Elle peut s'écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} D_k$, ou encore $1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{D_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!}$. On reconnaît le coefficient d'ordre n du produit de Cauchy des séries entières $\sum \frac{D_k}{k!} z^k$ et $\sum \frac{1}{k!} z^k$. On en déduit que pour $|z| < 1$, $D(z)e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ d'où l'on tire, $D(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}$ (c'est ici que s'effectue l'inversion). Il ne reste plus qu'à développer en série entière pour obtenir D_k. On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^{-z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^k$. Il en résulte que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{D_k}{k!} = \sum_{p=0}^{k} \frac{(-1)^p}{p!}$. C'est bien le résultat obtenu dans l'exercice précédent.

3. On a, d'après ce qui précède, $\frac{1}{e} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!} = \frac{D_k}{k!} + R_k$, où $R_k = \sum_{p=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!}$. Ainsi, $\frac{k!}{e} + \frac{1}{2} = D_k + \frac{1}{2} + k!R_k$. La série $\sum \frac{(-1)^p}{p!}$ vérifiant le critère des séries alternées, on sait que $|R_k| \leqslant \frac{1}{(k+1)!}$. Pour $k \geqslant 1$, on a donc $|k!R_k| < \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{2}$ et donc

$$\boxed{D_k = E\left(\frac{k!}{e} + \frac{1}{2}\right)}.$$

La formule est par ailleurs aussi vérifiée au rang $k = 0$. ◁

Remarquons que la proportion de dérangements $\frac{D_n}{n!}$ tend vers le nombre $1/e = 0{,}368...$ lorsque n tend vers l'infini. En particulier le rayon de convergence de la série entière D ci-dessus est e.

Dans l'exercice suivant on établit de manière combinatoire, une autre relation de récurrence qui permet le calcul de D_n.

1.4. Nombre de dérangements (3)

Les notations sont les mêmes que dans les deux exercices précédents.

1. Établir, par une preuve combinatoire, que pour tout $n \geqslant 2$,

$$D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1}).$$

2. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$.

3. Retrouver la valeur de D_n.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. On notera $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des dérangements de $[\![1,n]\!]$. Si $\sigma \in \mathcal{D}_{n+1}$, l'image de $n+1$ par σ est dans $[\![1,n]\!]$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, notons F_k l'ensemble des éléments σ de $\mathcal{D}_{n+1}$ tels que $\sigma(n+1) = k$. Les F_k partitionnent $\mathcal{D}_{n+1}$.

Nous allons prouver que le cardinal de F_k est égal à $D_n + D_{n-1}$ quel que soit l'entier k. On fixe donc k et on partitionne F_k en deux : G_k désigne l'ensemble des $\sigma \in F_k$ tels que $\sigma(k) = n+1$ et H_k désigne le complémentaire de G_k dans F_k. Il est clair qu'un élément de G_k est parfaitement déterminé par sa restriction à l'ensemble $\{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$, cette restriction devant être un dérangement. Il en résulte que $\mathrm{Card}(G_k) = D_{n-1}$. Cherchons maintenant le cardinal de H_k. Soit $\sigma \in H_k$. Alors $\sigma^{-1}(n+1) \neq k$. Considérons le dérangement $\tilde{\sigma}$ de $[\![1,n]\!]$ défini par $\tilde{\sigma}(i) = \sigma(i)$ pour $i \neq \sigma^{-1}(n+1)$, et $\tilde{\sigma}(\sigma^{-1}(n+1)) = k$ (on a simplement « court-circuité » $n+1$). Il est clair que l'application de H_k dans $\mathcal{D}_n$ qui à σ associe $\tilde{\sigma}$ est bijective de sorte que $\mathrm{Card}(H_k) = D_n$. On obtient donc $\mathrm{Card}(F_k) = D_{n-1} + D_n$, pour tout k, ce qui donne la relation de récurrence $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$.

2. On effectue une récurrence sur n, le résultat étant vrai pour $n = 2$ puisque $D_2 = 1$ et $D_1 = 0$. Supposons la formule vraie au rang n. On a alors

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= n(D_n + D_{n-1}) = nD_n + nD_{n-1} \\ &= nD_n + D_n - (-1)^n = (n+1)D_n + (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

ce qui est la formule au rang $n+1$.

3. En divisant la relation précédente par $n!$, il vient $\frac{D_n}{n!} = \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}$ pour tout $n \geqslant 2$. En sommant cette relation pour les indices $2, 3, \dots, n$, on retrouve la formule

$$D_n = n!\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right). \quad \triangleleft$$

Notons que les relations des questions 1 et 2 s'obtiennent facilement à partir de la série entière D de l'exercice précédent. Il suffit pour cela de dériver la relation $(1-z)D(z) = e^{-z}$. Dans son ouvrage de combinatoire[3]*, Comtet suggère l'existence d'une preuve combinatoire directe de la relation de la question 2. Cela ne semble toutefois pas très facile...*

L'exercice suivant s'intéresse au nombre de partitions d'un ensemble fini. C'est aussi le nombre de relations d'équivalence sur cet ensemble. On y fait encore usage de séries génératrices.

1.5. Nombres de Bell

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$, avec par convention, $B_0 = 1$.

1. Calculer B_1, B_2, B_3. Démonter que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k$.

2. On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$ (série génératrice exponentielle de la suite $(B_n)_{n\geqslant 0}$). Montrer que le rayon de convergence R de cette série entière n'est pas nul. Calculer $f(z)$ pour $z \in]-R, R[$.

3. Exprimer B_n comme somme d'une série.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. On obtient $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, considérons l'ensemble E_k des partitions de $[\![1, n+1]\!]$ pour lesquelles la partie de $[\![1, n+1]\!]$ contenant $n+1$ est de cardinal $k+1$. On a $\operatorname{Card} E_k = C_n^k B_{n-k}$. En effet, pour constituer la partie contenant $n+1$, il faut choisir k élément dans $[\![1, n]\!]$, puis il faut réaliser une partition des $n-k$ éléments restants. Comme $E_0, E_1, \ldots, E_n$ forment une partition de l'ensemble des partitions de $[\![1, n+1]\!]$, on obtient

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_{n-k} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j B_j,$$

3. COMTET (L.), *Analyse combinatoire*, tome 2, PUF, 1970, p. 11.

en faisant le changement d'indice $j = n-k$ dans la seconde égalité.

2. Pour minorer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{B_n}{n!}z^n$ il faut majorer B_n. Montrons donc, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $B_n \leqslant n!$. C'est vrai pour $n \leqslant 3$ et si la propriété est vérifiée jusqu'au rang n, alors

$$B_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k k! = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!} \leqslant (n+1)!.$$

On a donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{B_n}{n!} \leqslant 1$ et le rayon de convergence R de la série entière est supérieur ou égal à 1.

Calculons $f(z)$, pour $z \in]-R, R[$ en utilisant la relation de récurrence démontrée dans 1. On a, pour $z \in]-R, R[$, $f(z) = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}z^{n+1}$.

La fonction f est dérivable sur $]-R, R[$ et $f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_{n+1}}{n!}z^n$. On en déduit que, pour $z \in]-R, R[$, on a

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k\right)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!}\frac{1}{(n-k)!}\right)z^n.$$

On reconnaît dans le terme de droite un produit de Cauchy, celui des séries $\sum\frac{B_n}{n!}z^n$ et $\sum\frac{z^n}{n!}$. La première a pour somme $f(z)$ et la seconde e^z. Elles ont toutes deux un rayon de convergence supérieur ou égal à R. On a donc, pour $z \in]-R, R[$, $f'(z) = f(z)e^z$. On en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour $z \in]-R, R[$, $f(z) = Ce^{e^z}$. Sachant que $f(0) = B_0 = 1$, on en déduit que $C = \frac{1}{e}$. Finalement, on obtient pour $z \in]-R, R[$,

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{e}e^{e^z} = e^{e^z-1}}.$$

3. La série entière définissant la fonction exponentielle ayant un rayon de convergence infini, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$e^{e^z} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{nz}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(nz)^k}{k!}.$$

Considérons la série double $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ définie par $u_{n,k} = \frac{(nz)^k}{n!k!}$. On a, pour $n \in \mathbb{N}$,