# Exercices de préparation au concours général de mathématiques

Proposés par M.Lafforgue au lycée Blaise Pascal à Orsay en 2004/2005

Plusieurs exercices de thèmes différents sont regroupés ici : analyse, arithmétique, combinatoire et géométrie. Leur but étant de préparer au concours général. Une difficulté leur a été attribuée (entre zéro et trois étoiles) afin de servir d'indicateur.

## 1 Analyse

Quelques exercices d'analyse sont hors programme TS puisqu'ils demandent l'utilisation d'équivalents ou de dévéloppements limités.

**Exercice 1.1.** *Soient $a$ et $b$ deux complexes. A quelle condition la suite $(z_n)$ définie par : $z_{n+1} = az_n + b$ est-elle périodique à partir d'un certain rang ?*

**Exercice 1.2.** *[** - Concours Général 1995]Étudier la convergence de la suite $(u_n)$, définie par :*

$$u_0 \geq 0 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}\ , \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}$$

**Exercice 1.3.** *[*] Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de $n$. On définit la suite $(u_n)$ par :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} d(k).$$

*Trouver un équivalent de $u_n$.*

**Exercice 1.4.** *[*] Trouver un équivalent de :*

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n - e^a.$$

**Exercice 1.5.** *[***] Soient :*

$$f_n(x) = |x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)| \quad \text{et} \quad M_n = \sup_{[\![1,\ldots,n]\!]} |f_n|.$$

*Trouver un équivalent de $M_n$.*

## 2 Arithmétique

---

**Exercice 2.1.** *[Oral Mines]Soit $p \geq 5$ un nombre premier. Montrer que 24 divise $p^2 - 1$.*

---

**Exercice 2.2.** *Trouver tous les entiers $n$ tels que $2^n + 1$ soit divisible par 3.*

---

**Exercice 2.3.** *[* - Oral ENS]Trouver tous les couples $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $3^n - 2^m = 1$.*

---

**Exercice 2.4.** *[* - Oral Mines]On pose $F_n = 2^{(2^n)} - 1$. Montrer que si $n \neq m$, alors $F_n$ et $F_m$ sont premiers entre eux.*

---

**Exercice 2.5.** *[* - Oral Mines]Déterminer tous les entiers $n$ et $p$ tels que $\binom{n}{p-1}$, $\binom{n}{p}$ et $\binom{n}{p+1}$ soient en progression arithmétique.*

---

**Exercice 2.6.** *[* - Concours Général 1991] Soit $(x_n)$ une suite de nombres réels telle que, pour tout entier naturel $n$ :*

$$x_0^3 + x_1^3 + \cdots + x_n^3 = (x_0 + x_1 + \cdots + x_n)^2.$$

*1/ Montrer que, pour tout entier naturel $n$, il existe un entier naturel $m$ tel que :*

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_n = \frac{m(m+1)}{2}.$$

*2/ Si $n$ et $p$ sont deux nombres entiers naturels non nuls, on pose : $S_{n,p} = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$. Déterminer les entiers naturels non nuls $p$ tels que, quel que soit l'entier naturel non nul $n$, $S_{n,p}$ soit le carré d'un nombre entier naturel.*

---

**Exercice 2.7.** *[* - Concours Général 1999] Résoudre dans $\mathbb{N}$ :*

$$(n+3)^n = \sum_{k=3}^{n+2} k^n.$$

---

**Exercice 2.8.** *[**]Calculer :*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots.$$

**Exercice 2.9.** *[** - Oral X]Déterminer le pgcd des* $\binom{2n}{k}$*, où* $1 \leq k \leq 2n-1$.

---

**Exercice 2.10.** *[** - Concours Général* 1992*] Déterminer le chiffre des unités du plus grand nombre entier inférieur ou égal au nombre suivant :*

$$\frac{10^{1992}}{10^{83}+7}.$$

## 3 Combinatoire

---

**Exercice 3.1.** *[*]On note* $S(n,p)$ *le nombre de surjections d'un ensemble de cardinal* $n$ *dans un ensemble de cardinal* $p$.
*1/ Calculer* $S(n,n)$ *et* $S(p+1,p)$.
*2/ Montrer que :*

$$S(n,p) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S(n-k, p-1).$$

*3/ Montrer que :*

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} S(n,k) = p^n.$$

---

**Exercice 3.2.** *[*] Soit* $A_n$ *le nombre de parties de* $\{1,\ldots,n\}$ *qui ne contiennent pas deux entiers consécutifs.*
*1/ Montrer que :*

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}.$$

*2/ Calculer* $A_n$.

---

**Exercice 3.3.** *[** - Concours Général* 2000*] On dispose de* $b$ *boules blanches et* $n$ *boules noires, au moins de chaque, que l'on répartit entre deux urnes de façon qu'aucune d'elles ne soit vide. On note* $s$ *le nombre de boules dans la première, et* $r$ *celui de ces boules qui sont blanches. L'événement considéré est le tirage d'une boule au hasard dans l'une des urnes choisie au hasard. Le but de l'exercice est de déterminer les répartitions rendant maximale la probabilité* $p$ *de tirer un boule blanche.*
*1/ Exprimez* $p$ *en fonction de* $b$, $n$, $r$ *et* $s$.
*2/ Dans cette question, on fixe la valeur de* $s$*. Comment choisir* $r$ *pour augmenter* $p$ *?*
*3/ Résolvez l'exercice.*
*4/ Quelles généralisations proposez-vous en augmentant les nombres de couleurs et d'urnes ?*

# 4 Géométrie

---

**Exercice 4.1.** *[* - Oral Centrale]Soient $A, B, C$ des points d'affixes $a, b, c \in \mathbb{C}$. Montrer que le triangle $ABC$ est équilatéral si, et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.*

---

**Exercice 4.2.** *[** - Oral Mines] Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.*
*1/ Donner une CNS pour que $a, b, c$ soient les longueurs des côtés d'un triangle.*
*2/ Donner une CNS pour que $a, b, c$ soient les longueurs des hauteurs d'un triangle.*
*3/ Reprendre 1/ et 2/ avec un triangle acutangle (angles aigus).*

---

**Exercice 4.3.** *[** - Concours Général 1992]Soit $(C)$ un cercle du plan de rayon 1.*
*1/ Déterminer les triangles $ABC$ inscrits dans le cercle $(C)$ pour lesquels la somme $AB^2 + BC^2 + CA^2$ est maximale.*
*2/ Déterminer les quadrilatères $ABCD$ inscrits dans le cercle $(C)$ pour lesquels la somme $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2$ est maximale. Représenter un tel quadrilatère.*

---

**Exercice 4.4.** *[** - Concours Général 1993]*
*1/ Soient $A$ et $B$ deux points distincts de l'espace.*
*a. Parmi les triangles $MAB$ d'aire donnée, quels sont ceux de périmètre minimal ?*
*b. Parmi les triangles $MAB$ de périmètre donné, quels sont ceux d'aire maximale ?*
*2/ Soit, dans un tétraèdre de volume $V$, $a$, $b$, $c$, $d$ les longueurs de quatre arêtes, telles que trois quelconques d'entre elles ne soient pas coplanaires, et $L = a + b + c + d$. Déterminer la valeur maximale de :*

$$\frac{V}{L^3}.$$

---

**Exercice 4.5.** *[*** - Concours Général 1997] Dans le plan, soient $A$ et $B$ deux points distincts. Pour tout point $C$ extérieur à la droite $(AB)$, on note $G$ l'isobarycentre du triangle $ABC$ et $I$ le centre de cercle inscrit.*
*1/ Soit $\alpha$ un réel tel que $0 < \alpha < p$. Quel est l'ensemble $\Gamma$ des points $C$ tels que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \alpha + 2k\pi$ ? Lorsque $C$ décrit $\Gamma$, montrez que $G$ et $I$ décrivent deux arcs de cercle que l'on précisera.*
*2/ On suppose que $\dfrac{\pi}{3} < \alpha < \pi$. Comment choisir $C$ dans $\Gamma$ pour que la distance $GI$ soit minimale ?*
*3/ On note $f(\alpha)$ la distance $GI$ de la question précédente. Explicitez $f(\alpha)$ en fonction de $a = AB$ et de $\alpha$. Détérminez la valeur maximale de $f(\alpha)$ lorsque $\alpha$ décrit l'intervalle $]\dfrac{\pi}{3}; \pi[$.*