NOM: Kortchemski Prénom: Igor

Rouge ← Entourez l'épreuve → Bleu Entourez le jury → A B C D E F

Sujet choisi: 120 Dimension d'un ev (dimension finie). Rang. Exemples et applications

Autre sujet: 149 groupes de petit cardinal

120 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et application

Ici, k désigne un corps commutatif et E un k-espace vectoriel (abrégé en e.v), ainsi que F.

I Dimension d'un espace vectoriel

1) Familles libres, familles génératrices

Déf 1 Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de E. On note $k^{(I)}$ les suites presque nulles à valeurs dans k. On dit que

- (x_i) est génératrice si $\forall x \in E$, $\exists \alpha \in k^{(I)}$ tq
$$x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i$$
- $(x_i)_{i\in I}$ est libre si $\forall \alpha \in k^{(I)}$,
$$\left(\sum_{i\in I} \alpha_i x_i = 0\right) \Rightarrow (\forall i \in I, \alpha_i = 0)$$

Rq 2 Toute sous-famille d'une famille libre est libre, toute sur-famille d'une famille liée est liée

Déf 3 On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une base si elle est libre et génératrice

Lemme 4 $(x_i)_{i\in I}$ est liée ssi il existe un vecteur qui soit combinaison linéaire des autres.

Thm 5 Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. On a les équivalences:

1) $(e_i)_i$ est une base
2) $(e_i)_i$ est une famille génératrice minimale
3) $(e_i)_i$ est une famille libre maximale

Thm 6 Soit $(e_i)_i$ une famille finie de cardinal n de E. Alors toute famille de cardinal $n+1$ dont les éléments sont des combinaisons linéaires de e est liée

2) Théorie de la dimension

Déf 7 On appelle esp de dimension finie tout espace vectoriel admettant au moins une famille génératrice finie

Thm 8 (De la base incomplète). Soit $(e_i)_i$ une famille génératrice et $J \subset I$ tq $(e_i)_{i\in J}$ une famille libre. Alors il existe L tq $J \subset L \subset I$ et tq $(e_i)_{i\in L}$ est une base de E

Corollaire 9 Tout ev de dimension finie admet une base finie

Corollaire 10 Soit E un kev de dimension finie, (ℓ) une famille libre, (g) génératrice. Alors on peut compléter (ℓ) en une base en utilisant des éléments de (g)

Thm 11 Dans un kev de dim finie, il existe des bases. Elles sont toutes finies et ont un cardinal commun, appelé dimension de E, noté $\dim E$ ou $\dim_k E$.

Corollaire 12 Si $\dim E = n$ un système libre est fini, a pour cardinal au plus n, et exactement n éléments si c'est une base. Un système générateur a au moins n éléments et exactement n éléments si c'est une base

Prop 13 On a $\dim_k(E\times F) = \dim_k E \times \dim_k F$ si E et F sont des kev.

Ex 14 • k^n muni de la base canonique est un kev de dim n

• $k_n[X]$ est de dimension n, $\dim k[X] = \infty$

• Si $\mathcal{L}(E,F)$ désigne le kev des applications linéaires de E dans F, $\dim_k \mathcal{L}(E,F) = \dim_k E \times \dim_k F$

• $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = +\infty$

NOM: Kortchemski **Prénom:** Igor

Rouge ← Entourez l'épreuve → **Bleu** Entourez le jury → **A** B C D E F

Sujet choisi: 120 Dimension d'un eV

Autre sujet: 149 groupes de petit cardinal.

• Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}$, $\{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} ; \forall n \geq 0, u_{n+p} = \alpha_1 u_{n+p-1} + \dots + \alpha_p u_n\}$ est un $\mathbb{C}$ ev de dimension p

• Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\dim_k E < +\infty$, $k[u]$ est de dim finie, de dimension $\deg \mu_u$ où μ_u est le polynôme ~~qui~~ engendre $\{P \in k[X] ; P(u) = 0\}$.

• Si μ_u est irréductible, on munit E d'une structure de $k[X]/(\mu_u)$ ev en posant $\overline{P} \cdot (x) = P(u)(x)$.

• L'ensemble des formes n linéaires alternées sur un k ev de dim n est de dim 1

3) Sous-espaces vectoriels

Thm 15 Soit E un kev de dim finie, F un sev de E. Alors $\dim F < +\infty$, $\dim F \leq n$ avec égalité ssi $F = E$.

Thm 16 Soit E un k ev de dim finie. Tout sous-espace F de E admet au moins un supplémentaire, et pour tout supplémentaire G de E, $\dim F + \dim G = \dim E$

Appl 7 Si $\dim_k E < +\infty$, $u \in \mathcal{L}(E)$ tq μ_u est irréductible, alors tout sev stable par u admet un supplémentaire stable par u.

Cor 18 Si $\dim E < +\infty$ et F sev de E, E/F est de dim finie et $\dim E/F = \dim E - \dim F$

II) Rang d'une application linéaire

1) Notion de rang et théorème du rang

Déf 19 Soit E un kev et $x = (x_i)_{i \in I} \in E^I$. On appelle rang de x, $\dim_k \mathrm{Vect}(x)$.

• Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, on note $\mathrm{rg}\, u = \dim_k u(E)$

Prop 20 Si $\dim_k E < +\infty$ (aucune hypothèse sur F), et $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathrm{rg}\, u \leq \dim_k E$

$\boxed{\text{Appl/DVP 21 [Engel]}}$ Soit E un kev de dim finie ≥ 1. Soit $L \subset \mathcal{L}(E)$ une sous-algèbre de Lie, i.e un sev de $\mathcal{L}(E)$ tq $\forall u, v \in L$, $[u,v] = \mathrm{ad}_u v = uv - vu \in L$. On suppose que $\forall u \in L$, u est nilpotent. Alors $\exists x \in E$, $x \neq 0$, tq $\forall u \in L$, $u(x) = 0$

Ex 22 $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & * \\ & 0 \end{pmatrix} \in M_n(k) \right\}$ vérifie ces hypothèses

Thm 23 (du rang) Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathrm{Im}\, u \simeq E/\mathrm{Ker}\, u$ (on suppose $\dim E < +\infty$). Ainsi, $\boxed{\mathrm{rg}\, u = \dim E - \dim \mathrm{Ker}\, u}$

Appl 24 ($\dim E < +\infty$) : u est injectif $\Leftrightarrow \mathrm{rg}\, u = \dim E$

• Si $\dim F < +\infty$ et $\dim E = \dim F$, on a les équivalences: 1) u est injective 2) u est surjective 3) u est bijective 4) u est de rang n 5) u est inversible à gauche 6) u est inversible à droite

Ex 25 Ce résultat est faux en dimension infinie (prendre $u : \begin{array}{l} k[X] \to k[X] \\ P \mapsto P' \end{array}$)

Appl 26 Soit A une k-algèbre commutative de dimension finie. Alors A est intègre ssi A est un corps

Appl 27 (Formule de Grassmann) Si $\dim_k E < +\infty$ et E', E'' des sev de E, $\dim(E' \cap E'') + \dim(E' + E'') = \dim E' + \dim E''$.

2) Applications en dualité

Déf 28 On note $E^* = \mathcal{L}(E, k)$.

Prop 29 On a $\dim E = \dim E^*$.

NOM: Kordchemski Prénom: Igor

Rouge ← Entourez l'épreuve → Bleu Entourez le jury → A B C D E F

Sujet choisi: 120 : Dimension d'un espace vectoriel

Autre sujet: 149 : Groupes de petit cardinal

Thm 31 Soit $A \subset E$. On note $A^\perp = \{\varphi \in E^*; \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$ qui est un sev de E (on suppose $\dim E < +\infty$). Alors $\forall F$ sev de E, $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$

$\boxed{\text{Appl DVP 30}}$ Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dim n. Soient $A \subset B$ deux sev de $\mathcal{L}(E)$ et $M = \{t \in \mathcal{L}(E) ; [t, B] \subset A\}$. Soit $x \in M$ tel que $\forall y \in M$, $tr(xy) = 0$. Alors x est nilpotent.

Cor 32 Soit φ une forme quadratique sur E de dim finie. Soit F un sev de E. On note $F^\perp = \{x \in E ; \forall y \in F, \varphi(x,y) = 0\}$. Alors $\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim(F \cap \operatorname{Ker} \varphi)$

Appl 33 (même notations) Si $\varphi_{|F}$ est non dégénérée, $F \oplus F^\perp = E$.

Cor 34 Il existe une base de E φ-orthogonale.

III Topologie d'un e.v.n de dimension finie

Ici, $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\dim_k E = n$

Thm 35 Toutes les normes sur E sont équivalentes

Appl 36 Toute application linéaire d'un evn de dim finie dans un e.v.n est lipschitzienne.

Appl 37 Les parties compactes d'un evn de dim finie sont les fermés bornés.

Rq 38 On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\sum a_i X^i\| = \sup |a_i|$. Alors $u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$ n'est pas continue.

IV Applications en théorie des corps

1) Extensions

Def 39 Soient K, L des corps avec $K \subset L$. On dit que L est une extension de K.

Rq 40 Dans ce cas, L est muni d'une structure de K-ev.

Def 41 Si $\dim_K L < +\infty$, on note $[L : K] = \dim_K L$

Prop 42 Si K, L sont finis, $|L| = |K|^n$ avec $n = [L : K]$

$\boxed{\text{Appl 43}}$ [Wedderburn] Toute algèbre à division finie, est commutative (i.e est un corps)

Prop 44 Si $K \subset L \subset M$ sont des corps et $[M : L] < +\infty$, $[L : K] < +\infty$, alors $[M : K] < +\infty$ et $[M : K] = [M : L][L : K]$

2) Extensions algébriques

Def 45 Soit $K \subset L$ une extension, $\alpha \in L$ et $\varphi : K[T] \to L$ défini par $\varphi_{|K} = id_K$ et $\varphi(T) = \alpha$

1) Si φ est injectif, on dit que α est transcendant sur K

2) Sinon, on dit que α est algébrique. On appelle polynôme minimal le polynôme qui engendre l'idéal $\operatorname{Ker} \varphi$, noté μ_α

Prop 46 Soit $K \subset L$ une extension, $\alpha \in L$. On a équivalence entre :

1) α est algébrique sur K

2) $K[\alpha] = K(\alpha)$

3) $\dim_K K[\alpha] < +\infty$,

le cas échéant, μ_α est irréductible et $\dim_K K[\alpha] = d°P$

Thm 47 Soit $K \subset L$ une extension. Alors $\{x \in L ; x$ est algébrique sur $K\}$ est un sous-corps de L.

Ex 48 $\sqrt[7]{5} + \sqrt[3]{7}\sqrt{3}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.