Igor Kortchemski

# Cours 3 : Théorie générale des équations différentielles

Plan : 1) Problème de Cauchy
2) Existence et unicité
3) Équation d'ordre n

## 1) Problème de Cauchy

On considère le système $(*) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$, appelé problème de Cauchy, dont les données sont : (1) Un ensemble ouvert $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$
(2) une application continue $f : U \to \mathbb{R}^n$
(3) Un couple $(t_0, x_0) \in U$.

Souvent $U$ est de la forme $U = J \times \Omega$ où $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert.

**Remarque** il s'agit en fait d'un système d'équations : si on note $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$, alors $x'(t) = f(t, x(t)) \Leftrightarrow$
$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

**Définition** Une solution de ce problème de Cauchy est une fonction dérivable $u : I \to \mathbb{R}^n$ tq :
(1) $I$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $u(t_0) = x_0$
(2) $\forall t \in I$, $(t, u(t)) \in U$
(3) $\forall t \in I$, $u'(t) = f(t, u(t))$

Ainsi, une solution est donc en fait un couple $(u, I)$ : l'intervalle de définition $I$ fait partie des inconnus.

**Remarque** $f$ étant supposée continue, toute solution est $C^1$

Le problème de Cauchy peut se réécrire sous forme intégrale :

**Proposition** Soit $I \neq \emptyset$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \to \mathbb{R}^n$ tq $\forall t \in I$, $(t, u(t)) \in U$. Alors $u$ est solution du problème de Cauchy $(\mathcal{C})$ ssi $u : I \to \mathbb{R}^n$ est continue et vérifie

$$\forall t \in I, \quad u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$$

**Preuve** : $\boxed{\Rightarrow}$ Si $u$ est solution, on intègre $u'(s) = f(s, u(s))$ entre $t$ et $t_0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$ on a bien $u(t_0) = x_0$.

Par continuité de $f$, $t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$ est dérivable (même $C^1$), de dérivée $f(t, u(t))$, d'où le résultat

**Exemples** :
- $\begin{cases} x'(t) = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$, $U = I \times \mathbb{R}$

($f$ ne dépend que de $t$) : il y a une unique solution qui est $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$.

- $\begin{cases} x'(t) = \sqrt{\max(x(t), 0)} \\ x(0) = 0 \end{cases}$, $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Il n'y a pas unicité : $x(t) = 0$ et $x(t) = \frac{t^2}{4} \mathbb{1}_{t \geq 0}$ sont solution.

## 2) Existence et unicité

L'objectif des EDO est de modéliser des processus physiques qui sont souvent déterministes : si on connaît la dynamique d'un système et une condition initiale à $t = t_0$, alors l'évolution de ce système est unique pour $t \geq t_0$. Cette notion de déterminisme se traduit en termes mathématiques par l'existence et unicité de solutions, qui est donc une nécessité pour un modèle réaliste.

Pour l'unicité, il faudra des conditions supplémentaires (cf exemple ci-dessus)
Pour l'existence, la forme $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $f$ continue est importante

En effet, par exemple :

- $\begin{cases} x'(t)\,x(t)+t=0 \\ x(0)=0 \end{cases}$ n'a pas de solutions. En effet, si on avait une solution,

on aurait $\int_0^t x'(s)x(s)\,ds + \frac{t^2}{2} = 0$ et donc $\frac{x(t)^2}{2} + \frac{t^2}{2} = 0 \quad \forall t \in I$, absurde

- l'hypothèse de continuité est importante : on vérifie que
$\begin{cases} x'(t) = -H(x(t)) \\ x(t_0)=0 \end{cases}$ avec $H(x) = \begin{cases} \text{signe}(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

n'a pas de solution.

**Définition** Soit $U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue. On dit que $f$ est <u>semi-lipschitzienne</u> si $\forall (t_0, x_0) \in U$, $\exists J$ intervalle ouvert contenant $t_0$, $W$ voisinage ouvert de $x_0$ tq $J \times W \subset U$, $\exists L > 0$ tq

$\forall t \in J$, $\forall x, y \in W$, $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|$

(i.e $f$ est localement lipschitz par rapport à la seconde variable de manière uniforme en la première)

(On rappelle qu'en dimension finie les normes sont équivalentes : on peut choisir la norme qu'on veut sur $\mathbb{R}^n$)

**Proposition** Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^1$ avec $U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ ouvert. Alors $f$ est semi-lipschitzienne

Pour démontrer cela, on utilisera le résultat suivant :

**Théorème de la moyenne**

Soient $a<b$ dans $\mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues, dérivables sur $]a,b[$ telles que $\|f'(t)\| \leq g'(t)$ $\forall t \in ]a,b[$.

Alors $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$

Dans la suite on utilisera la notation $\overline{B}(x,r) = \{y \in E : d(x,y) \leq r\}$ pour la boule fermée de rayon $r$ et de centre $x$ dans un espace métrique $(E,d)$

Preuve : Soit $(t_0, x_0) \in U$. Soit $\varepsilon > 0$ tq $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \times \overline{B}(x_0,\varepsilon) \subset U$.

Comme $f$ est $C^1$, $\exists M > 0$ tq $|||Df||| \leq M$ sur $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \times \overline{B}(x_0,\varepsilon)$

Soit $t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$, $x, y \in \overline{B}(x_0,\varepsilon)$.

Posons $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$s \mapsto f(t, sy+(1-s)x)$

Alors $\varphi$ est $C^1$ et $\varphi'(s) = Df_{(t,sy+(1-s)x)}((0, x-y))$.

Ainsi, $\|\varphi'(s)\| \leq M\|x-y\|$. Donc d'après le thm de la moyenne
$\|f(t,x) - f(t,y)\| = \|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq M\|x-y\|$.

$\sim$

**Théorème (Cauchy-Lipschitz : existence et unicité locale)**

Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue, semi-lipschitzienne. Soit $(t_0, x_0) \in U$, $\eta, \rho, M, L > 0$ tels que $[t_0-\eta, t_0+\eta] \times \overline{B}(x_0,\rho) \subset U$ et :

- $\|f(t,x)\| \leq M \quad \forall (t,x) \in [t_0-\eta, t_0+\eta] \times \overline{B}(x_0,\rho)$
- $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\| \quad \forall t \in [t_0-\eta, t_0+\eta]$ et $\forall x,y \in \overline{B}(x_0,\rho)$

Alors $\forall \varepsilon < \min(\eta, \frac{\rho}{M})$, sur $[t_0+\varepsilon, t_0+\varepsilon]$, le problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ admet une unique solution

L'idée est d'appliquer le thm de point fixe de Picard : si $(X,d)$ est un espace métrique complet et $T : X \to X$ une contraction, c'est-à-dire $\exists\, 0 < k < 1$ tq
$\forall x,y \in X$, $d(T(x),T(y)) \leq k\, d(x,y)$. Alors $T$ admet un unique point fixe et les itérées de $T$ convergent vers ce point fixe depuis tout point de $X$.

(pour l'existence, on montre que la suite des itérées $(T^{(k)}(x))_{k\geq 1}$ est de Cauchy)

Dans la formulation intégrale, $u$ est une solution sur $I$ ssi $u$ est point fixe de

$$T : \mathcal{B}(I, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{B}(I, \mathbb{R}^n)$$
$$u \mapsto (Tu)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$$

Cependant en général $T$ n'est pas une contraction : il faut faire attention au choix de l'espace.

Preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $\varepsilon < \min(\eta, \frac{\rho}{M})$. Posons $X = \mathcal{B}([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \overline{B}(x_0, \rho))$

• Vérifions que
$$T : X \to X$$
$$u \mapsto (Tu)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$$
est bien définie.

Pour $u \in X$, pour $t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon$ :
$$\| (Tu)(t) - x_0 \| = \| \int_{t}^{t} f(s, u(s))\, ds \| \leq \varepsilon \cdot M \leq \rho$$

• Regardons si $T$ est contractante pour $u, v \in X$,
$$\| Tu - Tv \| = \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \int_{t_0}^{t} \| f(s, u(s)) - f(s, v(s)) \| ds$$
$$\leq \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \int_{t_0}^{t} L \, \| u(s) - v(s) \| \, ds$$
$$\leq \varepsilon L \, \| u - v \|_\infty$$

Ainsi $T$ est lipschitzienne mais pas forcément contractante. L'idée consiste à itérer $T$ (méthode de "Bootstrap"). En effet, on montre par récurrence que $\forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, $\forall u, v \in \mathcal{B}([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \overline{B}(x_0, \rho))$, $\forall n \geq 0$,
$$\| T^n u(t) - T^n v(t) \| \leq \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \| u - v \|_\infty$$

En effet c'est vrai pour $n = 0$ ($T^0 = \mathrm{Id}$) et si c'est vrai pour $n \geq 0$, alors
$$\| T^{n+1} u(t) - T^{n+1} v(t) \| \leq L \, \| \int_{t_0}^{t} \| T^n u(s) - T^n v(s) \| \, ds \leq \frac{L^{n+1} |t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!} \| u - v \|$$

Donc $T^n$ est $\frac{(L\varepsilon)^n}{n!}$-lipschitzienne. Comme $\frac{(L\varepsilon)^n}{n!} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

On peut choisir $n_0$ tq $T^{n_0}$ est contractante. D'après le thm de point fixe de Picard, $T^{n_0}$ admet un unique point fixe, noté $u$. Mais alors $Tu$ est aussi point fixe : $T^{n_0}(Tu) = T(T^{n_0}u) = Tu$. Donc $Tu = u$ par unicité, ce qui conclut.

- Pour conclure, il reste à montrer que si $v : [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ est solution, alors elle reste à valeurs dans $\bar{B}(x_0, \rho)$. En effet, par unicité du point fixe dans $X$, on aura $v = u$.

Par l'absurde supposons que $\|v(t_1) - x_0\| = \rho$ avec $t_1 \in [t_0, t_0+\varepsilon]$ (si $t_1 \in [t_0-\varepsilon, t_0]$ le raisonnement est similaire), et que $\|v(t) - x_0\| < \rho$ pour $t \in [t_0, t_1]$.
Alors $\rho = \|v(t_1) - x_0\| = \|\int_{t_0}^{t_1} f(s, u(s))\,ds\| \leq \left|\int_{t_0}^{t_1} \|f(s,u(s))\|\,ds\right| \leq \varepsilon M$,
ce qui contredit $\varepsilon < \frac{\rho}{M}$.

**Remarque** : On dit que $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \times \bar{B}(x_0, \rho)$ est un cylindre de sécurité car la solution n'en sort pas

**Corollaire** Sous les mêmes hypothèses, $\forall (t_0, x_0) \in U$, il existe un voisinage $V$ de $(t_0, x_0)$ et $\varepsilon' > 0$ tel que $\forall (t_0', x_0') \in V$, le problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0') = x_0' \end{cases}$

admet une unique solution sur $[t_0' - \varepsilon', t_0' + \varepsilon']$

(dans les notations de la preuve, on prend $V = ]t_0 - \frac{\varepsilon}{2}, t_0 + \frac{\varepsilon}{2}[ \times B(x_0, \frac{\rho}{2})$ et $\varepsilon' < \frac{1}{2}\min(\rho, M)$)

**Remarques** : • La suite de fonctions définies par récurrence
$u_0(t) = x_0$, $\quad u_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s))\,ds$
converge uniformément vers la solution du problème de Cauchy sur un intervalle $I$ suffisamment petit contenant $t_0$.

• On montre par récurrence que si $f$ est de classe $C^k$ alors les solutions sont de classe $C^{k+1}$. Ceci permet de calculer par exemple des DL

Exemple Calculons le DL en $t=0$ à l'ordre 2 de la solution du problème de de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{t+2}{t^2+x(t)^2} \\ x(0)=1 \end{cases}$

On prend $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(t,x) = \dfrac{t+2}{t^2+x^2}$ pour $(t,x) \in U$, de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Il existe donc une unique solution $u$ au voisinage de 0, de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On a $u(0)=1$, $u'(0) = \dfrac{0+2}{0^2+1^2} = 2$

En dérivant l'équation, on obtient $u''(t) = \dfrac{t^2+u(t)^2 - (t+2)(2t+2u(t)u'(t))}{(t^2+u(t)^2)^2}$

ce qui implique $u''(0) = -7$.
Ainsi, $u(t) = u(0) + t u'(0) + \frac{t^2}{2} u''(0) + o(t^2) = 1 + 2t - \frac{7}{2} t^2 + o(t^2)$.

# 3) Équations d'ordre n

Soit $\varphi : U \to \mathbb{R}$ avec $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert. On suppose $\varphi$ semi-lipschitzienne.
Considérons l'équa diff d'ordre n :

$$y^{(n)}(t) = \varphi(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad (*)$$

C'est équivalent à une équa diff d'ordre 1 en n inconnues :

**Proposition** L'équation $(*)$ se réécrit, en posant $x = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$,
par $x'(t) = f(t, x(t))$
où $f : U \to \mathbb{R}^n$ est semi-lipschitzienne
$(t, x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_2, \dots, x_n, \varphi(t, x_1, \dots, x_n))$

Preuve : • On a $x'(t) = (y'(t), \dots, y^{(n)}(t))$

$f(t, x(t)) = (y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t), \varphi(t, y, \dots, y^{(n-1)}))$

d'où la réécriture

- Pour vérifier le caractère semi-lipschitz,

Soit $(t_0, x_0) \in \Omega$ et $I$ voisinage de $t_0$, $W$ voisinage de $x_0$ tq $I \times W \subset \Omega$ et $\forall t \in I, \forall x, y \in W$ on a $\|\varphi(t,x) - \varphi(t,y)\| \leq L \|x - y\|$

Prenons pour $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Alors pour $t \in I$, $x, y \in W$ :

$$\begin{aligned}
\|f(t,x) - f(t,y)\|_2^2 &= \sum_{i=2}^{n} |x_i - y_i|^2 + |\varphi(t,x) - \varphi(t,y)|^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 + L^2 \|x - y\|^2 \\
&\leq (1 + L^2) \|x - y\|^2
\end{aligned}$$

Ainsi $f$ est semi-lipschitzienne.