Igor Kortchemski

Cours 15 : Stabilité & Fonctions de Lyapunov

Plan :
1) Stabilité par linéarisation (fin)
2) Stabilité par fonction de Lyapunov
3) Exemples d'application

1) Stabilité par linéarisation (fin)

Théorème (instabilité de Lyapounov) On suppose $f(0)=0$, $x'(t)=f(x(t))$ avec $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ C^1 et $\exists \lambda \in Sp(Df(0))$ avec $Re(\lambda)>0$. Alors 0 n'est pas stable.

Preuve Soit $A = Df(0)$. Notons $\sigma = \inf\{Re(\lambda) : \lambda \in Sp(A), Re\,\lambda > 0\} > 0$.

Étape 1 : transformer A en matrice plus simple

Par réduction de Jordan dans $\mathbb{C}$ on peut écrire $B = P^{-1}AP$ avec $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et

$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ avec $B_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ blocs de Jordan correspondant à $\lambda \in Sp(A)$

avec $Re(\lambda)>0$ et $B_2 \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ blocs de Jordan correspond à $\lambda \in Sp(A)$ avec $Re(\lambda) \leq 0$.

Quitte à faire un changement de base, on peut supposer que les coefficients au-dessus de la diagonale valent η.

(par exemple si $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1, \dots, e_k)$, elle devient $\begin{pmatrix} \lambda & \eta & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1, \eta e_2, \dots, \eta^{k-1} e_k)$).

On suppose $\eta < \frac{\sigma}{8}$. Soit $\varepsilon < \frac{\sigma}{8}$.

On écrit $x'(t) = A x(t) + g(x(t))$ avec $g(x) = f(x) - Ax$.

En posant $y(t) = P^{-1}x(t) \in \mathbb{C}^n$ on obtient

$$y'(t) = B y(t) + h(y(t)) \quad \text{avec } h(y) = P^{-1} g(P y) \qquad (\star)$$

Comme f est C^1 et $h(0)=0$, soit $\delta_0 > 0$ tel que $\|h(x)\| \leq \varepsilon \|x\|$ pour $\|x\| \leq \delta_0$.

Étape 2 On raisonne par l'absurde en supposant 0 stable. Soit $\delta>0$ tel que $\|x(0)\|<\delta \Rightarrow \forall t\geq 0,\ \|y(t)\|<\delta_0$. On choisit $x(0)=(\delta,0,\dots,0)$.

où $\mathbb{C}^n$ est muni de la norme $\|(x_1,\dots,x_n)\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{p}|x_i|^2}+\sqrt{\sum_{i=p+1}^{n}|x_i|^2}$

On écrit $y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}$ et $h(y(t))=\begin{pmatrix} h_1(y(t))\\ h_2(y(t))\end{pmatrix}$

de sorte que (*) devient $\begin{cases} y_1'(t)=B_1\,y_1(t)+h_1(y(t))\\ y_2'(t)=B_2\,y_2(t)+h_2(y(t)).\end{cases}$

L'idée est de considérer $R_1(t)=\|y_1(t)\|_2$ et $R_2(t)=\|y_2(t)\|$.

- On a $R_1(t)^2=\langle y_1(t),y_1(t)\rangle$ donc $\frac{d}{dt}R_1(t)^2=\langle \frac{d}{dt}y_1(t),y_1(t)\rangle+\langle y_1(t),\frac{d}{dt}y_1(t)\rangle=2\mathrm{Re}\langle\frac{d}{dt}y_1(t),y_1(t)\rangle$

Et $\langle\frac{d}{dt}y_1(t),y_1(t)\rangle=\underbrace{\langle B_1\,y_1(t),y_1(t)\rangle}_{\text{1er terme}}+\underbrace{\langle h_1(y(t)),y_1(t)\rangle}_{\text{2è terme}}$

$$\mathrm{Re}(\text{1er terme})=\underbrace{\sum_{i=1}^{p}\mathrm{Re}(\lambda_i)|(y_1)_i|^2}_{\geq\ \sigma R_1(t)^2}+\underbrace{\mathrm{Re}\Big(\sum_{i=2}^{p}\eta\,(y_1)_{i-1}\overline{(y_1)_i}\Big)}_{\text{en module }\leq\ \eta\sqrt{\sum_{i=2}^{p}|(y_1)_{i-1}|^2}\sqrt{\sum_{i=2}^{p}|(y_1)_i|^2}\ \text{(Cauchy-Schwarz)}\ \leq\ \eta R_1(t)^2}$$

Cauchy schwarz

$|\text{2è terme}|\leq\|h_1(y(t))\|\,R_1(t)$

$\leq\varepsilon\,(R_1(t)+R_2(t))\,R_1(t).$

En utilisant $\mathrm{Re}(z)\geq-|z|$ pour $z\in\mathbb{C}$, on obtient

$$2\,R_1(t)\frac{d}{dt}R_1(t)\geq 2\big(\sigma R_1(t)^2-\eta R_1(t)^2-\varepsilon(R_1(t)+R_2(t))R_1(t)\big)$$

Ainsi

$$R_1'(t)\geq(\sigma-\eta-\varepsilon)R_1(t)-\varepsilon R_2(t)$$

- De même, $\frac{d}{dt}R_2(t)^2=2\,\mathrm{Re}\big(\langle B_2\,y_2(t),y_2(t)\rangle+\langle h_2(y(t)),y_2(t)\rangle\big)$

$$=2\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{q}\mathrm{Re}(\lambda_i)|(y_2(t))_i|^2}_{\leq 0}+\underbrace{\mathrm{Re}\Big(\sum_{i=2}^{q}\eta\,(y_2(t))_{i-1}\overline{(y_2(t))_i}\Big)}_{\leq\ \eta R_2(t)^2}+\underbrace{\mathrm{Re}\langle h_2(y(t)),y_2(t)\rangle}_{\leq\ \varepsilon(R_1(t)+R_2(t))R_2(t)}\Big)$$

Ainsi $R_2'(t)\leq(\eta+\varepsilon)R_2(t)+\varepsilon R_1(t).$

Donc en notant $R(t) = R_1(t) - R_2(t)$,

$$R'(t) = R_1'(t) - R_2'(t) \geq (\sigma - \eta - 2\varepsilon) R_1(t) - (\eta + 2\varepsilon) R_2(t).$$
$$\geq \frac{\sigma}{2} R(t) \quad \text{car } \eta < \frac{\sigma}{8} \text{ et } \varepsilon < \frac{\sigma}{8}$$

Il en découle que $R(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} +\infty$, absurde car $\|y(t)\| \leq \delta_0 \ \forall t \geq 0$.

Résumé : $x'(t) = f(x(t))$ avec $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, soit x_0 équilibre.

- Si $\forall \lambda \in Sp(Df(x_0))$ $Re(\lambda) < 0$, alors x_0 est asymptotiquement stable
- Si $\exists \lambda \in Sp(Df(x_0))$ $Re(\lambda) > 0$, alors x_0 n'est pas stable.

Exemples Considérons $x' = f(x) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}$ et $x' = g(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}$

L'unique point d'équilibre de f et g est 0

On a $Df(0) = Dg(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, dont le spectre est $\{\pm i\}$

- 0 est asymptotiquement stable pour f : si $\rho(x) = x_1^2 + x_2^2$ et $x' = f(x)$, on a $\frac{d}{dt} \rho(x(t)) = 2(x_1 x_1' + x_2 x_2') = -2 \rho(x(t))^2$

  Donc $\rho(x(t)) = \|x(t)\|^2$ est décroissant et $\xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

- 0 n'est pas stable pour g : $\frac{d}{dt} \rho(x(t)) = 2 \rho(x(t))^2$

  Donc $\rho(x(t)) = \|x(t)\|^2 \to \infty$ en temps fini (explosion)

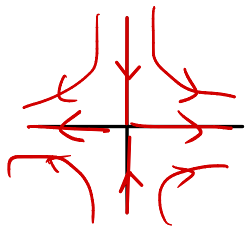
Remarque Nous avons utilisé certaines fonctions pour établir la stabilité/instabilité. Cette approche sera développée avec les fonctions de Lyapunov

Corollaire Soit x_0 un équilibre tel que $\forall \lambda \in Sp(Df(x_0))$ on a $Re\,\lambda \neq 0$ (on dit que x_0 est hyperbolique). Alors x_0 est soit asymptotiquement stable (si $\forall \lambda \in Sp(Df(x_0))$ on a $Re\,\lambda < 0$) soit non stable ($\exists \lambda \in Sp(Df(x_0))$ tel que $Re\,\lambda > 0$)

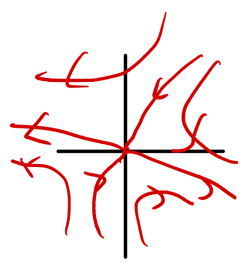
Remarque Les matrices A tq $\forall \lambda \in Sp(A)$ on a $Re\,\lambda \neq 0$ apparaissent souvent car elles forment un ouvert dense des matrices. Par ailleurs on a le résultat suivant (difficile)

Théorème d'Hartman–Grobman (admis) Soit x_0 un équilibre hyperbolique. Notons $\phi_t^L : y \mapsto e^{t\,Df(x_0)} y$ le flot du système linéarisé en x_0. Alors $\exists\, h : V_{x_0} \to V$ homéomorphisme $h : V_{x_0} \to V_0$ où V_{x_0} et V_0 sont des voisinages de respectivement de x_0 et 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\phi_t^L(h(x)) = h(\phi_t(x))$ pour tous $x \in V_{x_0}$, $t \in \mathbb{R}$ tels que $\phi_t(x)$ est bien défini

Illustration



portrait de phase de l'équation linéarisée



portrait de phase de l'équation.

2) Stabilité par fonctions de Liapounov

Il existe une autre approche que la linéarisation pour obtenir des résultats de stabilité qui ne nécessite pas la connaissance explicite du flot.

Commençons par un exemple qui illustre l'idée générale.

Exemple (champs de gradient) Un champ de gradient est un champ de vecteurs de la forme $f(x) = -\nabla V(x)$ où $V: \Omega \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe C^2. On rappelle que $\nabla V(x)$, le gradient de V en x est l'unique vecteur x de $\mathbb{R}^n$ tel que $DV(x) \cdot v = \langle \nabla V(x), v \rangle$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$. En coordonnées, $DV(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}(x)\right)$

Un équilibre x_0 est un point critique de V ($DV(x_0) = 0$).

Si x est solution de $x'(t) = -\nabla V(x(t))$, alors

$\frac{d}{dt} V(x(t)) = DV(x(t))(x'(t)) = -\|\nabla V(x(t))\|^2$ lorsque $x(t)$ est défini

Ainsi, $V(x(t))$ est soit constant, et dans ce cas $x(t) \equiv x_0$ est un point critique, soit strictement décroissante.

Intuitivement, toute solution tend à se rapprocher d'un minimum. On verra plus loin que

- si un équilibre x_0 n'est pas un minimum local (i.e x_0 est un maximum local ou un point selle), alors x_0 n'est pas un équilibre stable
- Si x_0 est un minimum local strict, alors x_0 est un équilibre stable.

On revient à l'équation $x'(t) = f(x(t))$ avec $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1

On rappelle que $\phi_t(x)$ désigne le flot, valeur à l'instant t de la solution maximale de $\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = x \end{cases}$, définie sur I_x

Définition Soit x_0 un équilibre, $U \subset \Omega$ un voisinage de x_0 et $L: U \to \mathbb{R}_+$ continue

On dit que L est une fonction de Lyapounov locale en x_0 si :

(a) $L(x_0) = 0$ et $L(x) > 0$ pour $x \neq x_0$ (ainsi x_0 est un minimum strict de L sur U)

(b) $\forall t \in \mathbb{R}_+ \cap I_x$, $\phi_t(x) \in U$ et $t \mapsto L(\phi_t(x))$ est décroissante sur $I_x \cap \mathbb{R}_+$

Si au lieu de (b) L satisfait :

(c) $\forall t \in \mathbb{R}_+ \cap I_x$, $\phi_t(x) \in U$ et $t \mapsto L(\phi_t(x))$ est strictement décroissante sur $I_x \cap \mathbb{R}_+$ on dit que L est une fonction de Lyapounov locale stricte

Enfin, si $U = \Omega$, on remplace "locale" par "globale" dans ce qui précède

Une fonction de Lyapounov est donc une sorte de fonction d'énergie qui décroît le long des trajectoires.

Lemme Soit $L : U \to \mathbb{R}_+$ une fonction de Lyapounov. Alors $\exists K \subset U$ voisinage compact de x_0 tel que $L : K \to \mathbb{R}_+$ est une fonction de Lyapounov

Preuve: Il suffit de trouver $K \subset U$ voisinage compact de x_0 tel que $\forall x \in K$, $\forall t \in I_x \cap \mathbb{R}_+$, $\phi_t(x) \in K$.

Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, \varepsilon_0) \subset U$. Soit $\eta = \inf\limits_{\|x - x_0\| = \varepsilon_0} L(x) > 0$.

Posons $K = \{ x \in \overline{B}(x_0, \varepsilon_0) : L(x) \leq \eta/2 \}$

Alors clairement par décroissance de $L(\phi_t(x))$, pour tout $x \in K$ on a $\phi_t(x) \in \overline{B}(x_0, \varepsilon_0)$ et $L(\phi_t(x)) \leq \eta/2$.

Remarque Quand L est dérivable, il est souvent plus simple de vérifier les conditions (b') et (c') suivantes :

(b') $\forall x \in U$, $\langle \nabla L(x), f(x) \rangle \leq 0$

(c') $\forall x \in U$, $x \neq x_0$, $\langle \nabla L f(x), f(x) \rangle < 0$.

En effet si (b') ou (c') sont réalisés, on a pour $x \in U$, $t \in I_x$:

$$\frac{d}{dt} L(\phi_t(x)) = dL(\phi_t(x))\left(\frac{d}{dt}\phi_t(x)\right) = dL(\phi_t(x))(f(\phi_t(x))) = \langle \nabla L(\phi_t(x)), f(\phi_t(x)) \rangle \begin{cases} \leq 0 \text{ si (b')} \\ < 0 \text{ si (c')} \end{cases} \quad (*)$$

Ainsi, si $\overline{B}(x_0, \varepsilon_0) \subset U$, en posant $K = \left\{ x \in \overline{B}(x_0, \varepsilon_0) : L(x) \leq \dfrac{\inf\limits_{\|y - x_0\| = \varepsilon_0} L(y)}{2} \right\}$ on vérifie que $L : K \to \mathbb{R}_+$ est une fonction de Lyapounov locale en x_0.

Théorème Supposons que $x'(t) = f(x(t))$ admette L comme fonction de Lyapounov locale en un équilibre x_0. Alors x_0 est stable

– (loc) Si de plus L est stricte, x_0 est localement asymptotiquement stable

– (glob) si de plus L est globale, stricte et $L(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$, alors x_0 est globalement asymptotiquement stable.

Preuve : D'après le lemme on peut supposer $\mathcal{W}$ compact.

Étape 1 $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_0$ tq $\alpha < \alpha_0 \Rightarrow \mathcal{W}_\alpha = \{x \in \mathcal{W}' . L(x) < \alpha\} \subset \overline{B}(x_0, \varepsilon)$.

En effet, Par l'absurde, soit $\varepsilon > 0$, $\alpha_n \searrow 0$ et x_n tel que $L(x_n) < \alpha_n$ avec $\|x_n - x_0\| > \varepsilon$

Par compacité de $\mathcal{W}'$, quitte à extraire on peut supposer $x_n \to x \in \mathcal{W}'$

Alors par continuité de L on a $L(x) = 0$ et $x \neq x_0$, ce qui contredit (a)

Étape 2 Par b) si $x \in \mathcal{W}_{\alpha_0}$, alors $\phi_t(x) \in \mathcal{W}_{\alpha_0}$ et donc $\|\phi_t(x) - x_0\| \leq \varepsilon$.

Donc x_0 est stable

- Supposons L stricte. Soit $x \in \mathcal{W}_{\alpha_0}$, $x \neq x_0$. $t \mapsto L(\phi_t(x))$ est décroissante minorée.

Soit $\ell \geq 0$ sa limite. Par compacité de $\overline{B}(x_0, \varepsilon)$, $\exists (t_n)$ tq $\phi_{t_n}(x) \to \bar{x}$.

Par monotonie, on a alors $\lim\limits_{t \to \infty} L(\phi_t(x)) = \bar{x}$.

Montrons que $\bar{x} = x_0$.

Par continuité de L, $L(\phi_t(x)) \xrightarrow[t \to \infty]{} L(\bar{x})$. Donc $L(\bar{x}) = \ell$.

Mais pour $s > 0$, $L(\phi_s(\bar{x})) = \lim\limits_{t \to \infty} L(\phi_{s+t}(x)) = L(\bar{x}) = \ell$

Comme $L(\phi_s(\bar{x})) < L(\bar{x})$ pour $\bar{x} \neq x_0$, on en déduit que $\bar{x} = x_0$

Donc la seule valeur d'adhérence de $(\phi_t(x))_{t \geq 0}$ est x_0.

Donc $\phi_t(x) \to x_0$

Dans le cas glob, on adapte la preuve en utilisant le fait que $\{x \in \Omega : L(x) \leq c\}$ pour $c > 0$ est compact

Remarques : • Pour un équilibre asymptotiquement stable x_0, on appelle bassin d'attraction de x_0 l'ensemble $\{x \in \Omega : \phi_t(x) \xrightarrow[t \to \infty]{} x_0\}$

Il contient un voisinage de x_0. Le déterminer est une question importante

- si L est une fonction de Lyapounov stricte, dans le cas glob le bassin d'attraction de x_0 est $\mathbb{R}^n$ tout entier.
- si $L : \mathcal{W} \to \mathbb{R}_+$ est stricte en x_0 et $P \subset \mathcal{W}$ est compact et invariant par ϕ_t, $t \geq 0$, (i.e. $\phi_t(P) \subset P$ pour $t \geq 0$) alors P est inclus dans le bassin d'attraction de x_0 (cf $\mathcal{W}_{\alpha_0}$)

3) Exemples d'application

a) Champs de gradient

Ici $x'(t) = -\nabla V(x(t))$ avec $V : \Omega \to \mathbb{R}$ C^2.

- Supposons que x_0 est un minimum local de V et que c'est le seul minimum de V sur un voisinage U de x_0. Alors x_0 est asymptotiquement stable.

  En effet, $V_{|U} - V(x_0)$ est une fonction de Lyapounov stricte en x_0 car $\frac{d}{dt} V(x(t)) = -\|\nabla V(x(t))\|^2 < 0$ si $x(t) \in U$ et $x(t) \neq x_0$.

  Donc x_0 est asymptotiquement stable.

- Supposons que $\nabla V(x_0) = 0$, que $\nabla V \neq 0$ sur $U \setminus \{x_0\}$ avec U voisinage de x_0 $\subset U$. et que x_0 n'est pas un minimum local de V.

  Montrons que x_0 est instable. Par l'absurde, soit $\varepsilon > 0$ tel que $\bar{B}(x_0, \varepsilon) \subset U$. Soit $\delta > 0$ tel que $\|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|\phi_t(x) - x_0\| \leq \varepsilon$.

  Choisissons y_0 tel que $\|y_0 - x_0\| \leq \delta$ et $V(y_0) < V(x_0)$.

  Comme précédemment $(V(\varphi_t(y_0)) : t \geq 0)$ décroit et donc $V(\varphi_t(y_0)) \leq V(y_0)$ $\forall t \geq 0$.

  Comme $\forall t \geq 0$ $\varphi_t(y_0) \in \bar{B}(x_0, \varepsilon)$, par compacité il existe $t_n \to \infty$ et $x \in \bar{B}(x_0, \varepsilon)$ tel que $\varphi_{t_n}(y_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in U$.

  Par monotonie, $V(\varphi_t(y_0)) \xrightarrow[t\to\infty]{} V(x)$. Ainsi $V(x) \leq V(y_0) < V(x_0)$ $(*)$.

  Par continuité, $\forall s \geq 0$, $\underbrace{V(\varphi_{s+t}(y_0))}_{\downarrow t\to\infty \ V(x)} = V(\varphi_s(\varphi_t(y_0))) \xrightarrow[t\to\infty]{} V(\varphi_s(x))$

  Donc $V(\varphi_s(x)) = V(x)$ $\forall s \geq 0$. Donc x est un point d'équilibre. Donc $x = x_0$ car $\nabla V \neq 0$ sur $U \setminus \{x_0\}$, ce qui contredit $(*)$

b) Champ de force conservatif

On considère un objet de masse m soumis à une force dérivant d'un potentiel $V(x)$. L'évolution de l'état $x \in \mathbb{R}^d$ de l'objet au cours du temps est régi par le principe fondamental de la dynamique : $m\, x''(t) = -\nabla V(x(t))$, qu'on réécrit :

$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -\frac{1}{m}\nabla V(x(t)) \end{pmatrix}$, i.e (x, x') est solution de :

$(x,v)'(t) = f((x,v)(t))$ où $f(x,v) = (v, -\frac{1}{m}\nabla V(x))$

Un équilibre est donc un point $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^{2n}$ avec $\nabla V(x_0) = 0$.

Supposons que x_0 est un minimum local strict de V

On pose $L(x,v) = \frac{1}{2} m \|v\|^2 + V(x) - V(x_0) \geq 0$

et $L(x,v) > 0$ pour $(x,v) \neq (x_0, 0)$ dans un voisinage de $(x_0,0)$.

Comme $\nabla L(x,v) = (\nabla V(x), mv)$, on a $\langle \nabla L(x,v), f(x,v)\rangle = 0$.

Ainsi L est une fonction de Lyapounov.

(en fait $L(x(t), v(t))$ est constante : c'est la conservation de l'énergie)

Ainsi $(x_0, 0)$ est stable (mais pas asymptotiquement : $(x(t), v(t))$ ne peut pas converger vers 0 car $L(x(t), v(t))$ est constant)

c) Champ de vecteur linéaire

Ici $x'(t) = Ax(t)$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

Théorème On a équivalence entre :

(1) $\forall \lambda \in Sp(A)$, $Re(\lambda) < 0$

(2) $\exists P \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $-(A^T P + PA) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

(3) $\forall Q \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\exists ! P \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $A^T \cdot P + P \cdot A = -Q$

Preuve On montre $(2) \Rightarrow (1)$ et $(1) \Rightarrow (3)$

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ Tout d'abord, si $R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ on a $\lambda_{min} x^T x \leq x^T R x \leq \lambda_{max} x^T x$

où λ_{min} est la plus petite valeur propre de R et λ_{max} la plus grande.

En effet, en diagonalisant R en base orthonormée : $R = U^T D U$ avec $U \in O_n(\mathbb{R})$

et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ diagonale, on a ${}^T x R x = {}^T x {}^T U D U x = (Ux)^T D U x = \sum_{i=1}^n \lambda_i (Ux)_i^2$

Mais $\lambda_{min} \sum_{i=1}^n (Ux)_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i (Ux)_i^2 \leq \lambda_{max} \sum_{i=1}^n (Ux)_i^2$

On conclut en remarquant que $\sum_{i=1}^n (Ux)_i^2 = (Ux)^T Ux = x^T U^T U x = x^T x$.

Ainsi, si ${}^tAP + PA = -Q$ avec $P, Q \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, notons $L(x) = {}^Tx\, Px$.

En notant λ_Q la plus petite valeur propre de Q et λ_P la plus grande valeur propre de P, on a

$$L'(x(t)) = {}^T(x(t)')P x(t) + {}^Tx(t) P x'(t) = x(t)^T (A^T P + PA) x(t)$$

$$= -{}^Tx(t) Q x(t) \leq -\lambda_Q\, {}^Tx(t)\, x(t) \leq -\frac{\lambda_Q}{\lambda_P} L(x)$$

Donc par Gronwall $L(x(t)) \leq e^{-\beta t} L(x(0))$ $\forall t \geq 0$.

Donc $\|x(t)\| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ exponentiellement vite. Donc $\forall \lambda \in Sp(A)$, $Re\, \lambda < 0$ d'après la forme des solutions de $x'(t) = A\, x(t)$ obtenues par réduction de Jordan

$\boxed{(1) \Rightarrow (3).}$ Supposons que $\forall \lambda \in Sp(A)$, $Re(\lambda) < 0$. Alors $\exists \eta > 0$ tq $\|e^{SA}\| \leq e^{-\eta S}$ $\forall s \geq 0$. $(*)$

En particulier, $P(t) = \int_0^t e^{sA^T} Q e^{sA} ds$

$$\xrightarrow[t\to\infty]{} P = \int_0^\infty e^{sA^T} Q e^{sA} ds \text{, qui converge bien par } (*).$$

De plus, $e^{tA^T} Q e^{tA} = A^T \int_0^t e^{sA^T} Q e^{sA} ds + \int_0^t e^{sA^T} Q e^{sA} ds + Q$

(la dérivée de la différence est nulle, et on a égalité pour $t=0$.)

Ainsi

$$e^{tA^T} Q e^{tA} = A^T P(t) + P(t) A^T + Q$$

En passant à la limite lorsque $t \to \infty$ on obtient

$$A^T P + P A^T = -Q$$

On vérifie aussi que $P \in S_n^{++}(\mathbb{R})$: pour $x \in \mathbb{R}^n$

$$x^T P(t) x = \int_0^\infty x^T e^{sA^T} Q e^{sA} x\, ds = \int_0^\infty \underbrace{(e^{SA} x)^T Q (e^{SA} x)}_{\geq 0} ds \geq 0$$

- Pour l'unicité, si $A^T M + MA = -Q$, on écrit

$$-e^{SA^T} Q e^{SA} = e^{SA^T} A^T M e^{SA} + e^{SA^T} M A e^{SA} = \frac{d}{ds}(e^{SA^T} M e^{SA})$$

et en intégrant entre 0 et ∞ on obtient $M = \int_0^\infty e^{SA^T} Q e^{SA} ds$

Avec ce résultat on peut donner une autre preuve du théorème de stabilité de Lyapunov:

Posons $A = Df(0)$.

Supposons $x'(t) = f(x(t))$, $f(0)=0$, $\forall \lambda \in Sp(Df(0))$ $Re(\lambda)<0$. Trouvons une fonction de Lyapunov stricte en 0, ce qui impliquera que 0 est asymptotiquement stable.

Soit $P \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ solution de $A^T P + P A = -I_n$, $P = \int_0^{\infty} e^{sA^T} e^{sA} ds$

On pose $L(x) = x^T P x > 0$ pour $x \neq 0$.

En utilisant le fait que $f(x) = A \cdot x + o(\|x\|)$,

et le fait que $\langle \nabla L(x), y \rangle = y^T P x + x^T P y$,

$$\begin{aligned}\langle \nabla L(x), f(x) \rangle &= (A x + o(\|x\|))^T P x + x^T P (Ax + o(\|x\|)) \\ &= x^T A^T P x + x^T P A x + o(\|x\|^2) \\ &= -\|x\|^2 + o(\|x\|^2) \leq -\frac{1}{2}\|x\|^2 < 0 \quad \text{pour } x \neq 0 \text{ assez proche de } 0.\end{aligned}$$