Igor Kortchemski

Cours 14 : Flot, stabilité

Plan : 1) Application du flot
2) Équilibres et stabilité
3) Stabilité par linéarisation

1) Application du flot

On considère l'équation $x'(t) = f(x(t))$ avec $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.
On rappelle qu'on note $t \mapsto \phi_t(x_0)$ la solution maximale avec $x(0) = x_0$ et I_{x_0} son intervalle de définition.
Posons $\mathcal{D} = \{ (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega : t \in I_x \}$
le domaine de définition de $(t,x) \mapsto \phi_t(x)$

Rappel :

Théorème (flot)
1. $\mathcal{D}$ est ouvert
2. $\phi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$, $(t,x) \mapsto \phi_t(x)$ est de classe C^1
3. On note $D_x \phi_t(x)$ la différentielle de $\phi_t(x)$ par rapport à x au point x, matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $Df(x)$ la différentielle de $x \mapsto f(x)$ au point x vue comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\forall (t,x) \in \mathcal{D}$
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} D_x \phi_t(x) = D f(\phi_t(x)) \, D_x \phi_t(x) \\ D_x \phi_0(x) = I_d \qquad (\phi_0(x) = x) \end{cases}$$

Remarque : Le théorème peut être appliqué à des équations différentielles à paramètre. Par exemple si $x'(t) = f_\lambda(x(t))$ avec $f_\lambda : \Omega \to \mathbb{R}^n$ C^1

On pose $f(x,\lambda) = f_\lambda(x)$ et on suppose que $(x,\lambda) \mapsto f(x,\lambda)$ est C^1.

Alors $x'(t) = f_\lambda(x(t))$ se réécrit $\begin{cases} x'(t) = f(x(t),\lambda) \\ \lambda'(t) = 0 \end{cases}$

qui se réécrit $X'(t) = F(X(t))$

avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix}$ $\quad F(x,\lambda) = \begin{pmatrix} f(x,\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Application Pour un champ de vecteurs $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ C^1, en notant $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, la divergence de f est définie par

$$\operatorname{div} f(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) = \operatorname{tr}(Df(x))$$

Soit ϕ le flot associé à $x'(t) = f(x(t))$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ mesurable tel que ϕ_t soit défini sur A

On suppose $\operatorname{div} f = 0$.

alors $\operatorname{Vol}(A) = \operatorname{Vol}(\phi_t(A))$

Preuve : Par changement de variable

$$\operatorname{Vol}(\phi_t(A)) = \int_{\phi_t(A)} d\,\mathrm{leb} = \int_A |\det D_x\phi_t(x)|\, d\mathrm{leb}(x)$$

Or $\frac{d}{dt} D_x\phi_t(x) = \underbrace{Df(\phi_t(x))}_{\text{de trace nulle}} \cdot D_x\phi_t(x)$

On en déduit que $t \mapsto \det D_x\phi_t(x)$ est constant. en $t=0$ il vaut 1.

2) Équilibre et stabilité

On garde l'équation $x'(t) = f(x(t))$ avec $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.

Définition Un point $x_0 \in \Omega$ est un équilibre de $x'(t) = f(x(t))$ si la fonction constante $x(t) = x_0$ est solution, ce qui est équivalent à $f(x_0) = 0$.

Dans ce cas, l'orbite de x_0 est $\{x_0\}$. D'un point de vue physique cela correspond à un "état d'équilibre" : si un objet y est, il y reste.

Définition Un équilibre x_0 est stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|\phi_t(x) - x_0\| \leq \varepsilon$ pour $t \in I_x \cap \mathbb{R}_+$

Remarque En choisissant $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, \varepsilon) \subset \Omega$, on voit que $\phi_t(x) \in \overline{B}(x_0, \varepsilon)$ compact $\forall t \in I_x \cap \mathbb{R}_+$. D'après le théorème de sortie définitive de tout compact, cela implique $I_x \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+$: $\phi_t(x)$ est défini pour tout $t \geq 0$.

Définition
- Un équilibre x_0 est (localement) asymptotiquement stable si il est stable et $\exists V \subset \Omega$ voisinage de x_0 tel que $\forall x \in V$, $\phi_t(x) \xrightarrow[t \to \infty]{} x_0$
- Si $V = \Omega$, on dit que x est globalement asymptotiquement stable

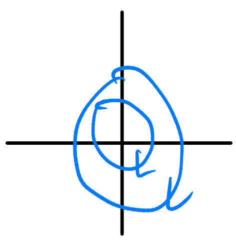
Ainsi, dans le premier cas, toute solution proche de l'équilibre en reste proche et de plus converge vers lui.

Dans le cas linéaire, l'utilisation de la réduction de Jordan et l'étude des solutions qui en a suivi permet de montrer :

Proposition Considérons l'équation $x'(t) = Ax(t)$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

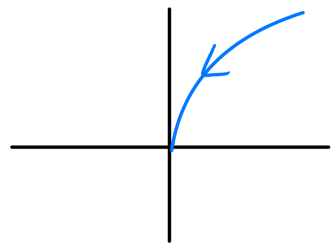
- 0 est un point d'équilibre stable ssi $\forall \lambda \in Sp(A) = \{$ valeur propre de $A\}$, $Re(\lambda) \leq 0$, et si $Re\,\lambda = 0$, les multiplicités algébriques et géométriques sont égales
- 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable ssi $\forall \lambda \in Sp(A)$ on a $Re(\lambda) < 0$

Exemples (portrait de phase)



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

0 stable mais non asymptotiquement stable



$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

0 asymptotiquement stable

3) Stabilité par linéarisation

On revient à l'équation $x'(t) = f(x(t))$ avec $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.
Si x_0 est un équilibre, nous allons voir que l'étude des valeurs propres de $Df(x_0)$ permet de caractériser la stabilité de l'équilibre

Théorème (stabilité de Lyapounov)
Si $\forall \lambda \in Sp(Df(x_0))$ on a $Re(\lambda) < 0$, alors x_0 est asymptotiquement stable

Remarque La condition est suffisante mais pas nécessaire. Par exemple, si $y'(t) = -y^3(t)$, on a $Df(0)=0$, mais la solution avec $y(0)=y_0$ est $y(t) = \frac{\text{signe}(y_0)}{\sqrt{2t+1/y_0^2}}$ $t \geq 0$, qui converge vers 0 quand $t \to \infty$.

Preuve. Quitte à faire une translation on peut supposer $x_0 = 0$.
Posons $A = Df(0)$
Soit $\sigma > 0$ tel que $\forall \lambda \in Sp(A)$, $Re(\lambda) < -\sigma$. La forme de $\exp(tA)$ obtenue par réduction de Jordan montre que $e^{t\sigma} e^{tA} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$. Soit donc $C > 0$ tel que $\|e^{tA}\| \leq C e^{-t\sigma}$ $\forall t \geq 0$.

Écrivons $x'(t) = A\, x(t) + \underbrace{(f(x(t)) - A\, x(t))}_{g(x(t))}$. avec $\|g(x)\| = o(\|x\|)$

D'après la formule de Duhamel,
$$x(t) = e^{tA} x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} g(x(s))\, ds$$

Soit $\varepsilon < \frac{\sigma}{2C}$ et $\delta > 0$ tel que $\|g(x)\| \leq \varepsilon \|x\|$ pour $\|x\| < \delta$.

Vérifions que $\|x(0)\| < \frac{\delta}{2C} \Rightarrow \forall t \geq 0$ $\|x(t)\| \leq \delta$.

Par l'absurde, soit $t_0 = \inf\{t > 0 : \|x(t)\| > \delta\}$. Alors par continuité $\|x(t_0)\| = \delta$, mais
$$\|x(t_0)\| \leq \|e^{t_0 A}\| \, \|x(0)\| + \int_0^{t_0} \|e^{(t_0-s)A}\| \, \|g(x(s))\| ds$$
$$\leq C e^{-t_0\sigma} \|x(0)\| + \int_0^{t_0} C e^{-(t_0-s)\sigma} \varepsilon \|x(s)\| ds$$
Donc $\|x(t_0)\| < \underbrace{\frac{\delta}{2}}_{} + \varepsilon \delta C \underbrace{\int_0^{t_0} e^{-(t_0-s)\sigma} ds}_{1/\sigma}$
$< \delta$

Absurde.

Prenons ainsi $\|x(0)\| < \frac{\delta}{2C}$. Alors $\forall t \geq 0$, $\|x(t)\| < \delta$, donc $\|g(x(t))\| \leq \varepsilon \|x(t)\|$.

On en déduit qu'en notant $y(t) = \|x(t)\| e^{t\sigma}$ on a donc

$$y(t) \leq C\|x(0)\| + C\varepsilon \int_0^t e^{-s\sigma} y(s)\, ds$$

On utilise alors la version suivante du lemme de Gronwall vue précédemment

Lemme de Gronwall On suppose $y : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ continues, $c > 0$ tq $y(t) \leq c + \int_a^t f(s) y(s)\, ds$ pour $t \in [a,b]$.
Alors $y(t) \leq c \exp\left(\int_a^t f(s)\, ds\right)$.

Ainsi, $y(t) \leq C\|x(0)\| \exp\left(C\varepsilon \int_0^t e^{-s\sigma} ds\right) \leq C\|x(0)\| e^{C\varepsilon/\sigma}$

Ainsi, $\forall t \geq 0$, $\|x(t)\| \leq C\|x(0)\| e^{C\varepsilon/\sigma} e^{-t\sigma} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$