Igor Kortchenski

Cours 13 : Exponentielle réelle, flot

Plan : 1) Calcul de l'exponentielle dans $M_n(\mathbb{R})$
2) flots et portraits de phase
3) Régularité du flot.

1) Calcul de l'exponentielle dans $M_n(\mathbb{R})$

Rappel : Théorème de Jordan. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(XI_n - A) = (X-\lambda_1)^{p_1} \cdots (X-\lambda_r)^{p_r}$, $e_i = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_n)$. $\exists P \in Gl_n(\mathbb{C})$ tq $P^{-1}AP$ s'écrit

par blocs $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots & J_r \end{pmatrix}$ avec $J_i \in M_{p_i}(\mathbb{C})$ de la forme

$J_i = \begin{pmatrix} J_{i,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{i,e_i} \end{pmatrix}$ avec $J_{i,k} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ bloc de Jordan de taille $n_{i,k} \in \{1,2,\dots,p_i\}$

- le nombre de blocs avec λ_i sur la diagonale de taille $\geq d$ est $\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda_i I_n)^d - \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda_i I_n)^{d-1}$ (☆)

Théorème de Jordan dans $M_n(\mathbb{R})$ Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres. On suppose que $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ et $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_r \notin \mathbb{R}$.
$\exists Q \in Gl_n(\mathbb{R})$ tel que

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} J_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & J_s & & \\ & & & J'_{s+1} & \\ 0 & & & & \ddots & J'_{\frac{r+s}{2}} \end{pmatrix}$$

où $J_1, \dots, J_s$ ont la même forme qu'avant

et $J'_j = \begin{pmatrix} J'_{j,1} & & \\ & \ddots & \\ & & J'_{j,e_i} \end{pmatrix}$ où $J'_{j,k} = \begin{pmatrix} a_j & -b_j & 1 & 0 & & & \\ b_j & a_j & 0 & 1 & & & \\ & & a_j & -b_j & 1 & 0 & \\ & & b_j & a_j & 0 & 1 & \\ & & & & \ddots & & 1 & 0 \\ & & & & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & & & a_j & -b_j \\ & & & & & & b_j & a_j \end{pmatrix}$

et les $a_j \pm i b_j$ sont les valeurs propres non réelles de A

On donne juste l'idée de la preuve :

Étape 1 : pour $\lambda_i \notin \mathbb{R}$, λ_i et $\overline{\lambda_i}$ sont valeurs propres, et les tailles des blocs de Jordan pour ces valeurs propres sont les mêmes par (*)

car $\forall d \geq 1$, $\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda_i I_n)^d = \dim \operatorname{Ker}(\overline{A-\lambda_i Id})^d$
$= \dim \operatorname{Ker}(A-\overline{\lambda_i} Id)^d$.

Étape 2 On regroupe les blocs de même taille correspondant à λ_i et $\overline{\lambda_i}$

Faisons le sur un exemple.

Vérifions que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a+ib & 1 & & \\ 0 & a+ib & & \\ & & a-ib & 1 \\ & & 0 & a-ib \end{pmatrix}$$ peut être conjuguée à

$$M' = \begin{pmatrix} a & -b & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

En effet, par permutations de lignes et colonnes, M peut être conjugée à

$$\begin{pmatrix} a+ib & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+ib & 0 \\ 0 & a-ib & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-ib \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \begin{pmatrix} a+ib & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-ib & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a+ib & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-ib \end{pmatrix}$$

Si f est la matrice de $\begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$ dans la matrice canonique (e_1, e_2)

la matrice de f dans la base $(e_1+e_2, i(e_1-e_2))$ est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

On conclut avec le lemme suivant :

Lemme Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in Gl_n(\mathbb{C})$ tq $A = PBP^{-1}$. Il existe alors $Q \in Gl_n(\mathbb{R})$ tel que $A = QBQ^{-1}$

Preuve : Notons $P = U + iV$. De $PA = PB$ il vient $AU = UB$, $AV = VB$.
Ainsi $P(t) = \det(U + tV)$ est un polynôme non nul en $t = i$.
On peut donc trouver $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(t_0) \neq 0$.
Alors $Q = U + t_0 V$ convient.

Corollaire Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Toute solution de $x'(t) = Ax(t)$ s'écrit sous la forme

$$x(t) = \sum_{1 \leq i \leq r} e^{t\alpha_i} \left(\sum_{0 \leq k \leq m_i - 1} t^k \left(\cos(\beta_i t)\, a_{i,k} + \sin(\beta_i t)\, b_{i,k} \right) \right) \quad (*)$$

où $\alpha_i = \mathrm{Re}(\lambda_i)$, $\beta_i = \mathrm{Im}(\lambda_i)$, $a_{i,k}, b_{i,k} \in \mathrm{Ker}\left((A - \lambda_i)^{p_i} \right)$.

Preuve C'est une conséquence de la décomposition de Jordan dans $M_n(\mathbb{R})$ combiné avec le fait que

$$\exp\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = e^a \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$$ vu au cours dernier

On en déduit le comportement asymptotique des solutions.

Un cas particulier intéressant est lorsque $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$: alors tous les blocs de Jordan sont de taille 1 : $m_i = 1$ dans $(*)$:

Proposition Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres. Parmi les solutions de $x'(t) = Ax(t)$:

- $E^s = \bigoplus_{\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0} \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I_n) \cap \mathbb{R}^n = \{ x(0) \in \mathbb{R}^n : x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0 \text{ exponentiellement vite} \}$

- $E^u = \bigoplus_{\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0} \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I_n) \cap \mathbb{R}^n = \{ x(0) \in \mathbb{R}^n : x(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0 \text{ exponentiellement vite} \}$

$$E^c = \bigoplus_{\mathrm{Re}\,\lambda_i = 0} \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I_n) \cap \mathbb{R}^n = \{ x(0) \in \mathbb{R}^n : (x(t))_{t \geq 0} \text{ est périodique (donc bornée)} \}$$

2) Flots et portraits de phase

On considère maintenant l'équation $x'(t) = f(x(t))$ avec $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ C^1, avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, dite autonome : f ne dépend pas explicitement du temps (on peut étendre ce qui suit au cas non-autonome $f'(t) = f(t, x(t))$, mais on se restreint au cas autonome pour simplifier)

On dit parfois que $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs

En particulier les solutions sont invariantes par translation du temps : si x est solution, $x(t_0 + \cdot)$ l'est aussi : on pourra se limiter aux conditions initiales avec $t=0$.

Définition Pour $x_0 \in \Omega$, notons $t \mapsto \phi_t(x_0)$ la solution maximale de $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ et I_{x_0} son intervalle de définition

L'application $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$ est appelée flot du champ de vecteurs f (ou de l'équation $x' = f(x)$)

Par définition, à x fixé $t \mapsto \phi_t(x)$ vérifie $\frac{\partial}{\partial t} \phi_t(x) = f(\phi_t(x))$

Pour une étude qualitative de l'équation différentielle, il est important d'étudier plutôt $\phi_t : x \mapsto \phi_t(x)$ à t fixé. De façon imagée, $\phi_t(x)$ est la position à l'instant t d'un corps transporté par l'équation différentielle qui se trouvait à la position x en $t=0$

Exemple Si f est linéaire, $f(x)=Ax$ avec $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le flot est donné par l'exponentielle :
$\phi_t(x)=e^{tA}x$ pour $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

Ainsi le flot généralise l'exponentielle de matrice, et possède des propriétés similaires :

Proposition Si $t_1\in I_x$, $t_2\in I_{\phi_{t_1}(x)}$, alors $t_1+t_2\in I_x$ et $\phi_{t_1+t_2}(x)=\phi_{t_2}(\phi_{t_1}(x))$

En particulier, si $t\in I_x$, $\phi_{-t}(\phi_t(x))=x$.

Preuve : $t\mapsto\phi_{t_1+t}(x)$ est la solution maximale valant $\phi_{t_1}(x)$ en $t=0$, ce qui est la définition de $t\mapsto\phi_t(\phi_{t_1}(x))$

En particulier, si $I_x=\mathbb{R}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ (on dit que f est un champ de vecteurs complet), alors $(t,x)\mapsto\phi_t(x)$ est défini sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et on a :

- $\phi_t\circ\phi_s=\phi_{t+s}$
- $\phi_{-t}\circ\phi_t=Id$
- $\phi_0=Id$
- $\frac{\partial}{\partial t}\phi_t=f\circ\phi_t$.

On étudiera plus tard le domaine de définition et la régularité de $(t,x)\mapsto\phi_t(x)$

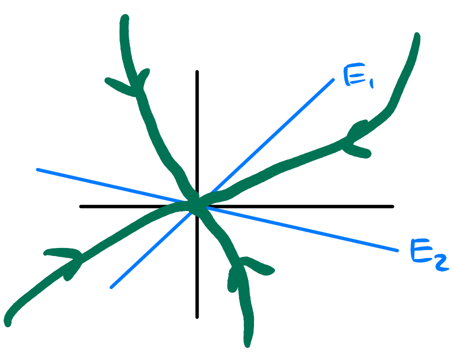
Définition L'orbite d'un point $x_0\in\Omega$ est l'ensemble $O_{x_0}=\{\phi_t(x_0):t\in I_{x_0}\}$, aussi appelé trajectoire passant par x_0. C'est la courbe tracée sur $\mathbb{R}^n$ par la solution maximale de $\begin{cases}x'(t)=f(x(t))\\ x(0)=x_0\end{cases}$

L'invariance par translation implique que $\forall x \in \mathcal{O}_{x_0}$ on a $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_{x_0}$: deux orbites distinctes ne peuvent pas se croiser.

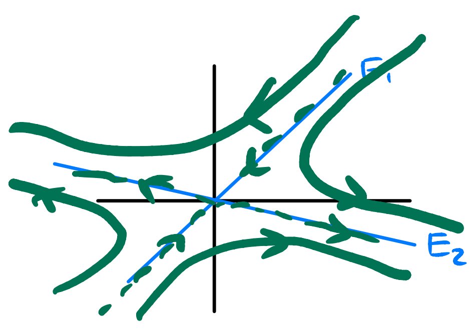
La partition de Ω en orbites est le portrait de phase du champ de vecteurs. On y trouve 3 sortes d'orbites :

- des points : $\mathcal{O}_{x_0} = \{x_0\}$, qui correspondent à des points fixes de ϕ_t
- des courbes fermées. $\exists$ alors x dans l'orbite et $T > 0$ tel que $\Phi_T(x) = x$. Alors $\phi_{t+T}(x) = \phi_t(x)$ $\forall t \in \mathbb{R}$: la solution maximale $t \mapsto \phi_t(x)$ est T périodique.
  On parle d'orbite périodique
- des courbes ouvertes (avec $\phi_t(x) \neq \phi_s(x)$ si $s \neq t$.

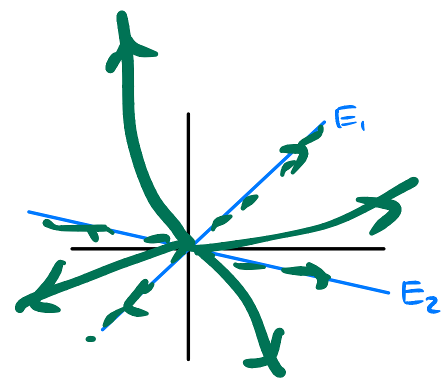
Exemple Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Supposons que A a deux valeurs propres réelles $\neq$ λ_1 et λ_2. Décrivons les portraits de phase possibles en utilisant ce qui a été fait dans 1). Notons $E_1 = \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I_2)$, $E_2 = \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I_2)$



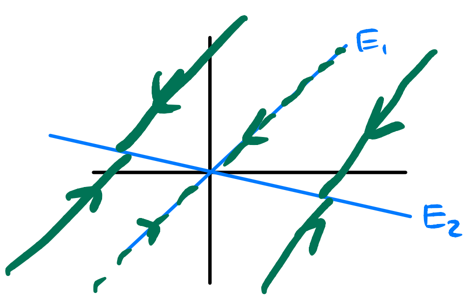
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



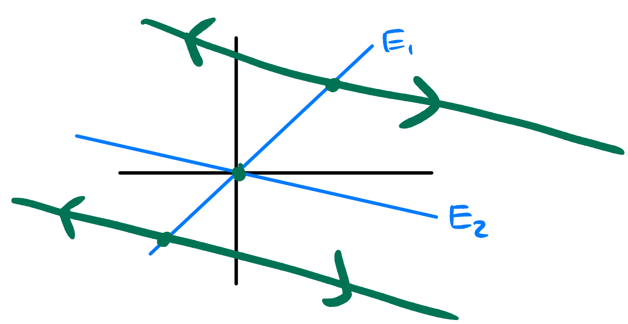
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



$0 < \lambda_1 < \lambda_2$



$\lambda_1 < \lambda_2 = 0$



$0 = \lambda_1 < \lambda_2$

3) Régularité du flot

On considère toujours l'équation $x'(t) = f(x(t))$ avec $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.
On rappelle qu'on note $t \mapsto \phi_t(x_0)$ la solution maximale avec $x(0) = x_0$ et I_{x_0} son intervalle de définition.

Posons $\mathcal{D} = \{ (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega : t \in I_x \}$
le domaine de définition de $(t,x) \mapsto \phi_t(x)$

Rappels · Une fonction $f : U \to \mathbb{R}^p$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$ différentiable en $x_0 \in U$ si $\exists L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ linéaire telle que $f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + o(\|h\|)$. On note $Df(x_0)(h) = L(h)$, qui peut être vue comme une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On note aussi $D_{x_0} f(h)$

- f est C^1 si $\begin{aligned} Df : U &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \\ x &\mapsto D_x f \end{aligned}$ est continue

- Si f et g sont différentiables, $D(f \circ g)(x)(h) = Df(g(x))\big(Dg(x)(h)\big)$ $(\ast)$

Théorème (flot)

① $\mathcal{D}$ est ouvert

② $\begin{aligned} \phi : \mathcal{D} &\to \mathbb{R}^n \\ (t,x) &\mapsto \phi_t(x) \end{aligned}$ est de classe C^1

③ On note $D_x \phi_t(x)$ la différentielle de $\phi_t(x)$ par rapport à x du point x, comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $Df(x)$ la différentielle de $x \mapsto f(x)$ au point x vue comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\forall (t,x) \in \mathcal{D}$
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} D_x \phi_t(x) = D f(\phi_t(x)) \, D_x \phi_t(x) \\ D_x \phi_0(x) = Id \qquad (\phi_0(x) = x) \end{cases}$$

Exemple si $x'(t) = A\,x(t)$, $\phi_t(x) = e^{At} x$ avec $f(x) = Ax$. Alors $D_x \phi_t(x) = e^{At}$, $Df(x) = A$
et on a bien $\begin{cases} \dfrac{d}{dt} e^{At} = A \cdot e^{At} \\ e^{A \cdot 0} = I_n \end{cases}$

Exemple dans $\mathbb{R}^2$, $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

La solution de $\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = x \end{cases}$ est $\varphi_t(x) = \frac{x}{\|x\|} t + x$.

Vérifions que $\frac{d}{dt} D_x \varphi_t(x)(h) = D f(\varphi_t(x)) \, D_x \varphi_t(x)(h)$ $\forall h \in \mathbb{R}^2$ avec $\langle x, h\rangle = 0$

On a $Df(x)(h) = \frac{h}{\|x\|} - \frac{x}{\|x\|^2} \langle x, h\rangle$

En effet, $f(x+h) = \frac{x+h}{\sqrt{\langle x+h, x+h\rangle}} = \frac{x+h}{\sqrt{\|x\|^2 + 2\langle x,h\rangle + \|h\|^2}} = \frac{1}{\|x\|}(x+h)\left(1 + \frac{2}{\|x\|^2}\langle x,h\rangle + o(\|h\|)\right)^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{\|x\|}(x+h)\left(1 - \frac{1}{\|x\|^2}\langle x, h\rangle + o(h)\right)$, d'où le résultat.

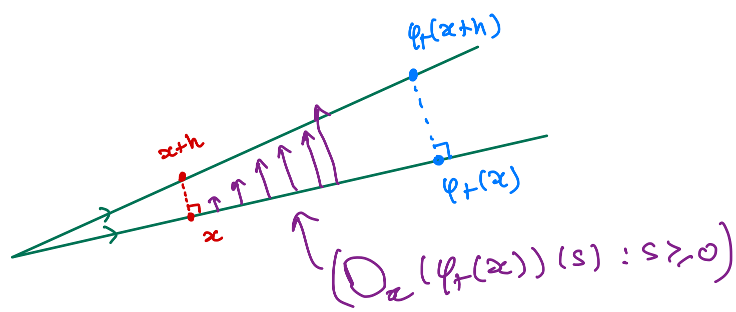
En choisissant h tel que $\langle x, h\rangle = 0$, on a alors:

- $D_x \varphi_t(x)(h) = \left(\frac{h}{\|x\|^2} - \frac{x}{\|x\|^2}\langle x, h\rangle\right) t + h = \frac{ht}{\|x\|} + h$
- $Df(\varphi_t(x))(h) = \frac{h}{\|\varphi_t(x)\|} = \frac{h}{t + \|x\|}$

On trouve bien $\frac{d}{dt} D_x \phi_t(x)(h) = \frac{h}{\|x\|}$

et $D f(\varphi_t(x)) \, D_x \phi_t(x)(h) = \frac{1}{t + \|x\|}\left(\frac{ht}{\|x\|} + h\right) = \frac{h}{\|x\|}$

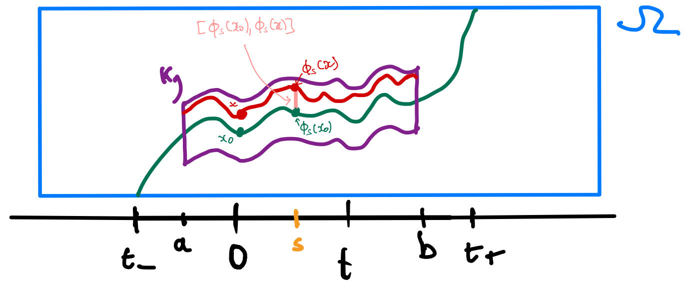
Illustration :



son évolution est régie par Df le long de $(\varphi_t(x))_{t \geq 0}$

Intuition de la formule Si on peut intervertir D et $\frac{d}{dt}$:

$$\frac{d}{dt} D_x \varphi_t(x) = D_x \frac{d}{dt} \phi_t(x) = D_x f(\phi_t(x)) \overset{\text{par } (*)}{=} Df(\varphi_t(x)) \, D_x \varphi_t(x)$$



<u>Preuve</u> Soit $(t, x_0) \in \mathcal{D}$

Notons $]t_-, t_+[$ l'intervalle de définition de $t \mapsto \varphi_t(x_0)$. Soit $a \in]t_-, 0[$ et $b \in]t, t_+[$
D'après le théorème de dépendance continue des solutions par rapport aux conditions initiales, $\exists \eta > 0, L > 0$ tels que

① $K_\eta = \{(s, z) \in [a,b] \times \Omega : \|z - \varphi_s(x_0)\| \leq \eta\}$ est un compact inclus dans $[a,b] \times \Omega$

② $\forall x \in \Omega$ tel que $\|x_0 - x\| \leq \eta$, $s \mapsto \varphi_s(x)$ est défini sur $[a,b]$ et vérifie :
$\forall s \in [0,t]$, $\|\varphi_s(x_0) - \varphi_s(x)\| \leq e^{Ls} \|x - x_0\|$

- ② montre déjà que $\mathcal{D}$ est ouvert
- Pour montrer que $(t,x) \mapsto \phi_t(x)$ est C^1, il suffit de montrer que
  - ⓐ $t \mapsto \phi_t(x)$ est C^1
  - ⓑ $x \mapsto \phi_t(x)$ est C^1

ⓐ : provient du fait que $\frac{d}{dt} \phi_t(x) = f(\phi_t(x))$.

ⓑ : On s'intéresse à $\phi_s(x) - \phi_s(x_0)$ pour x proche de x_0.
L'idée est de considérer la fonction $T(y) = f(y) - Df(\varphi_s(x_0))\, y$ pour y proche de $\varphi_s(x_0)$.

Tout d'abord, si $\|x - x_0\| \leq \eta e^{-Lt}$, on a $\forall s \in [0,t]$ $\|\phi_s(x) - \phi_s(x_0)\| \leq \eta$ et $\forall y \in [\phi_s(x_0), \phi_s(x)]$, $(s, y) \in K_\eta$

On rappelle

<u>Inégalité des accroissements finis</u>

Soit $g : O \to \mathbb{R}^n$ avec $O \subset \mathbb{R}^p$ ouvert, différentiable. Soient $a, b \in O$. On suppose $[a,b] = \{at + (1-t)b : t \in [0,1]\} \subset O$.
Alors $\|g(b) - g(a)\| \leq \sup_{x \in [a,b]} \|Dg(x)\| \, \|b - a\|$ (dans $[0, +\infty]$)

On l'applique à T sur $[\varphi_s(x_0), \varphi_s(x)]$:

$$\|T(\varphi_s(x_0)) - T(\varphi_s(x))\| \leq \sup_{y \in [\varphi_s(x_0), \varphi_s(x)]} \|Df(y) - Df(\varphi_s(x_0))\| \cdot \underbrace{\|\varphi_s(x_0) - \varphi_s(x)\|}_{\leq e^{Lt} \|x - x_0\|}$$

Mais pour $y \in [\varphi_s(x_0), \varphi_s(x)]$, $(s, y) \in K_\eta$.

Par uniforme continuité de Df sur K_η (f est C^1), on a donc

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \sup_{y \in [\varphi_s(x_0), \varphi_s(x)]} \|Df(y) - Df(\varphi_s(x_0))\| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \quad (*)$$

Ainsi, $T(\varphi_s(x)) - T(\varphi_s(x_0)) = b(s,x)$ avec b continue et $\sup_{0 \leq s \leq t} b(s,x) = o(\|x - x_0\|)$

$$T(\varphi_s(x)) - T(\varphi_s(x_0)) = f(\varphi_s(x)) - f(\varphi_s(x_0)) - Df(\varphi_s(x_0))(\varphi_s(x) - \varphi_s(x_0)).$$

En notant $F(s,x) = \varphi_s(x) - \varphi_s(x_0)$ on a donc

$$\frac{d}{ds} F(s,x) = Df(\varphi_s(x_0)) F(s,x) + b(s,x).$$

La formule de Duhamel donne

$$F(t,x) = R(t,0) F(0,x) + \int_0^t R(t,s) b(s,x)\, ds$$

où $R(t,s)$ est la résolvante de $X'(t) = A(t) X(t)$ avec $A(t) = Df(\varphi_t(x_0))$

Donc $\varphi_t(x) - \varphi_t(x_0) = R(t,0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$ par $(*)$ et continuité de R.

On en déduit que $x \mapsto \varphi_t(x)$ est différentiable en x et que sa différentielle vaut $R(t,0)$, qui est la solution de

$$\begin{cases} X'(t) = Df(\varphi_t(x)) X(t) \\ X(0) = I_n. \end{cases}$$