Igor Kortchemski

Cours 12 : Résolvante, Équa diffs linéaires autonomes

Plan : 1) Cas non homogène
2) Équation différentielles d'ordre n
3) Équation différentielles linéaires autonomes
4) Exponentielles de matrices
5) Calcul de l'exponentielle d'un $M_n(\mathbb{C})$

1) Cas non homogène

On s'intéresse maintenant au cas non homogène $(*)\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Par linéarité, la différence de deux solutions de $(*)$ est solution de l'équation homogène avec $b=0$.

Ainsi, si v est une solution quelconque de $(*)$, toute solution x de $(*)$ s'écrit $x = u+v$ avec u solution de l'équation homogène.

La résolvante est utile pour donner une formule explicite pour la solution de $(*)$ et aussi pour trouver une solution de $(*)$ en pratique

Rappelons que pour $t_0 \in T$, $R_A(t,t_0) \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie $\begin{cases} \frac{d}{dt} R_A(t,t_0) = A(t) R_A(t,t_0) \\ R_A(t_0,t_0) = I_n. \end{cases}$

Théorème (Formule de Duhamel) Soient $t_0 \in J$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. L'unique solution de $\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ est $u(t) = R(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)\, b(s)\, ds$

Preuve : Par unicité, il suffit de vérifier que u est solution :

- $u(t_0) = R(t_0,t_0)x_0 + 0 = x_0$
- $u'(t) = \frac{d}{dt} R(t,t_0)x_0 + \frac{d}{dt} F(t,t)$ avec $F(u,t) = \int_{t_0}^{u} R(t,s)\, b(s)\, ds$

$$= \frac{d}{dt} R(t,t_0)x_0 + \frac{\partial}{\partial u} F(t,t) + \frac{\partial}{\partial t} F(t,t)$$

$$= \frac{d}{dt} R(t,t_0)x_0 + R(t,t)\, b(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt} R(t,s)\, b(s)\, ds$$

$$= A(t)R(t,t_0)x_0 + b(t) + \int_{t_0}^{t} A(t)R(t,s)\, b(s)\, ds.$$

$$= A(t)\left(R(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)\, b(s)\, ds\right) + b(t).$$

$$= A(t)\, u(t) + b(t)$$

En pratique, on utilise souvent la méthode de "la variation de la constante" pour trouver une solution particulière sous la forme $v(t) = R(t,t_0)\, c(t)$.

En dérivant : $v'(t) = \frac{d}{dt} R(t,t_0)c(t) + R(t,t_0)c'(t) = A(t)v(t) + c'(t)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{A(t)R(t,t_0)\, c(t)}_{v(t)} + R(t,t_0)c'(t) = A(t)v(t) + c'(t)$$

Ainsi $c'(t) = R(t_0,t)\, b(t)$.

On peut donc choisir une solution particulière sous la forme

$$v(t) = R(t,t_0)\int_{t_0}^{t} R(t_0,s)\, b(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} R(t,s)\, b(s)\, ds \qquad (v(t_0)=0)$$

Cas particulier ($n=1$, $A(t) = a$)

Si $x'(t) = a x(t) + b(t)$, $\qquad x(t) = e^{(t-t_0)a} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{(t-t_0)a}\, b(s)\, ds.$

2) Équations différentielles linéaires d'ordre n

Une équation différentielle linéaire d'ordre n (scalaire) est de la forme :

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t)\, y^{(i)}(t) = \beta(t) \quad (\ast)$$

où $\alpha_i : J \to \mathbb{R}$, $\beta : J \to \mathbb{R}$ sont continues.

Proposition L'équation (*) se réécrit, en posant $x = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$ sous la forme $x'(t) = A(t)\, x(t) + b(t)$ où :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-2} \; -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

Ainsi, dans le cas $\beta = 0$, n solutions $v_1, \dots, v_n : J \to \mathbb{R}$ forment une base ssi la matrice wronskienne

$$W(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) & \cdots & v_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^{(n-1)}(t) & \cdots & v_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$ est inversible $\forall t \in J$,

et si $(v_1, \dots, v_n)$ est une base alors pour toute solution v de (*) il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} v(t) = \lambda_1 v_1(t) + \dots + \lambda_n v_n(t) \\ v'(t) = \lambda_1 v_1'(t) + \dots + \lambda_n v_n'(t) \\ \quad \vdots \\ v^{(n-1)}(t) = \lambda_1 v_1^{(n-1)}(t) + \dots + \lambda_n v_n^{(n-1)}(t) \end{cases}$$

3) Équations différentielles linéaires autonomes

Les équations différentielles linéaires autonomes sont de la forme

$$x'(t) = A\, x(t)$$

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $x : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$

(A ne dépend pas de t : on parle aussi d'équations différentielles linéaires à coefficients constants)

Cas particulier : $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

On vérifie alors que la solution de $x'(t) = A\,x(t)$ est

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t_0)\, e^{\alpha_1(t-t_0)} \\ \vdots \\ x_n(t_0)\, e^{\alpha_n(t-t_0)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\alpha_1(t-t_0)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha_n(t-t_0)} \end{pmatrix}}_{\text{matrice notée } e^{(t-t_0)A}} x(t_0)$$

Ici nous avons une solution explicite, qui permet d'en déduire le comportement asymptotique des solutions :

- si $\alpha_i < 0 \ \forall i$, alors toute solution x vérifie $x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$
- si $\alpha_i \leq 0 \ \forall i$, alors toute solution est bornée
- Si $\alpha_{i_0} > 0$, alors $\|x(t)\| \xrightarrow[t\to\infty]{} +\infty$ pour tout solution telle que $x_{i_0}(t_0) \neq 0$.

etc.

Autre cas intéressant : Supposons $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.

On peut alors écrire $A = P D P^{-1}$ avec D diagonale et $P \in GL_n(\mathbb{R})$

On vérifie alors que la solution de $\begin{cases} x'(t) = A\,x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

est $x(t) = P\, e^{(t-t_0)D} P^{-1}\, x(t_0)$

En effet $x'(t) = P D\, e^{(t-t_0)D} P^{-1} x(t_0)$

$\qquad = A P e^{(t-t_0)D} P^{-1} x(t_0) = A\,x(t)$.

Plus généralement, nous allons voir que les solutions se calculent à l'aide de la notion d'exponentielle de matrice

4) Exponentielle de matrices

Commençons par quelques rappels

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit $M_n(\mathbb{K})$ d'une norme $\|\cdot\|$ multiplicative ($\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$) par exemple $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Définition L'exponentielle de matrice est l'application

$$\exp : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$$
$$A \mapsto \exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

La série est bien définie car $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ converge absolument:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq e^{\|A\|} < \infty.$$

Rappelons quelques propriétés (sans preuve) de l'exponentielle

Proposition

- $\exp$ est C^∞
- $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $t \mapsto e^{tA}$ est dérivable et $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A$
- $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $\exp(A)$ est inversible et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$
- Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ commutent ($AB = BA$), alors $\exp(A+B) = \exp(A) \exp(B)$
- Si $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $A \in M_n(\mathbb{K})$, $P e^A P^{-1} = e^{PAP^{-1}}$
- Si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ est diagonale, alors $\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

Exemple Pour $a, b \in \mathbb{R}$ on a $\exp\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = e^a \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$

En effet écrivons $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a I_2 + b M$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme I_2 et M commutent, $\exp\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = e^a e^{bM}$.

Mais $M^2 = -I_2$, de sorte que

$$e^{bM} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} b^k M^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} b^{2k} (-1)^k I_2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (-1)^k b^{2k+1} M$$

$$= \cos b \, I_2 + \sin b \, M.$$

Théorème Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{K}^n$. Alors la solution de $\begin{cases} x'(t) = A\,x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ est $x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0$ pour $t \in \mathbb{R}$

Preuve : Si $x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0$, on a $x(t_0) = e^{0} x_0 = I_n x_0 = x_0$
et $x'(t) = A e^{(t-t_0)A} x_0 = A\,x(t)$
L'unicité provient du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

∞

Remarque: On peut démontrer l'unicité directement : si y est une autre solution de $\begin{cases} x'(t) = A\,x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ posons $z(t) = e^{-(t-t_0)A} y(t)$

Alors $z'(t) = -A e^{-(t-t_0)A} y(t) + e^{-(t-t_0)A} \underbrace{y'(t)}_{Ay(t)} = 0$ car $Ae^{tA} = e^{tA}A$

Donc z est constante. Comme $z(t_0) = x_0$, on obtient
$y(t) = e^{(t-t_0)A} z(t_0) = e^{(t-t_0)A} x_0$.

Lorsque A est diagonalisable, $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale et $P \in GL_n(\mathbb{K})$,
$e^{tA} = P e^{tD} P^{-1}$ et on retrouve le fait que la solution est $x(t) = P e^{(t-t_0)D} P^{-1} x(t_0)$

Dans le cas général, la théorie de la réduction des endomorphismes permet de calculer l'exponentielle de matrice.

5) Calcul de l'exponentielle dans $M_n(\mathbb{C})$

Rappelons quelques notions de réduction.

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

- $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A si $\exists\, v \in \mathbb{C}^n, v \neq 0$, avec $Av = \lambda v$

- Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique $P_A(X) = \det(XI_n - A)$ de A.

Ainsi, si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les différentes valeurs propres de A, on a
$$P_A(X) = (X-\lambda_1)^{p_1} \cdots (X-\lambda_r)^{p_r}$$
où $p_1, \dots, p_r \geq 1$ vérifient $p_1 + \dots + p_r = n$.
p_i est la multiplicité algébrique de λ_i

Théorème (Cayley-Hamilton)
Toute matrice annule son polynôme caractéristique :
$$P_A(A) = (A - \lambda_1 I_n)^{p_1} \cdots (A - \lambda_r I_n)^{p_r} = 0$$

- Le sous-espace propre associé à λ_i est $\Pi_i = \Pi_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I_n)$
Sa dimension $e_i = \dim \Pi_i$ est appelée multiplicité géométrique de λ_i.

- Le sous-espace caractéristique associé à λ_i est $\Gamma_i = \Gamma_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I_n)^{p_i}$.

Ainsi, $\Pi_i \subset \Gamma_i$ mais ces espaces peuvent être différents.

Théorème (de décomposition des noyaux)
On a $\mathbb{C}^n = \Gamma_1 \oplus \cdots \oplus \Gamma_r$ et :

① $\dim \Gamma_i = p_i$

② $\forall x \in \Gamma_i$, $x \in \Gamma_i \Rightarrow Ax \in \Gamma_i$

③ La restriction de A à Γ_i s'écrit
$$A_{|\Gamma_i} = \lambda_i I_{\Gamma_i} + N_i$$
avec I_{Γ_i} l'identité sur Γ_i et $N_i : \Gamma_i \to \Gamma_i$ est nilpotent d'indice $\leq p_i$, c'est-à-dire $N_i^{p_i} = 0$

Remarques • le fait que $N_i^{p_i}=0$ est une conséquence de la définition de Γ_i mais il se peut que $N_i^{m_i}=0$ avec $m_i<p_i$.

• Une matrice est diagonalisable si $\exists$ base de $\mathbb{C}^n$ de vecteurs propres, ce qui est équivalent à
$\mathbb{C}^n = \Pi_1 \oplus \dots \oplus \Pi_r$.
D'après le théorème, ce n'est possible que si $\Pi_i = \Gamma_i \ \forall i$. Ainsi A est diagonalisable ssi $\forall 1\leq i\leq r \ \dim \Pi_i = p_i$.

• En choisissant une base adaptée à la décomposition, on obtient $P\in GL_n(\mathbb{C})$ tq $P^{-1}AP = D+N$
avec D diagonale, d'éléments diagonaux $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ avec λ_i p_i fois et

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_r \end{pmatrix}$$ avec N_i nilpotents

Le théorème de Jordan permet de mettre N sous forme relativement simple:

Théorème de Jordan Pour tout $A\in M_n(\mathbb{C})$, $\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$ tq $P^{-1}AP$ s'écrit par blocs

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$ avec $J_i\in M_{p_i}(\mathbb{C})$ de la forme

$$J_i = \begin{pmatrix} J_{i,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{i,e_i} \end{pmatrix}$$ avec $J_{i,k} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ une matrice carrée de taille $n_{i,k}\in\{1,2,\dots,p_i\}$

On appelle $J=P^{-1}AP$ la forme réduite de Jordan de A et les matrices $J_{i,j}$ les blocs de Jordan. La dimension $n_{i,k}$ est appelée taille du bloc

Remarque: il est possible de montrer que le nombre de blocs avec λ_i sur la diagonale de taille $\geq d$ est $\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda_i I_n)^d - \dim \mathrm{Ker}(A-\lambda_i I_n)^{d-1}$.

Exemple $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & 0 & \\ & 0 & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_1 & 1 & 0 \\ & 0 & & & \lambda_1 & 1 \\ & & & & & \lambda_1 \end{pmatrix}$ est une réduite de Jordan avec $p_1 = 6$ et $e_1 = 3$ et 3 blocs de tailles 1, 2, 3.

Remarque : Si $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, N est nilpotente d'ordre n et on a $N^k = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \; \cdots \; 0}^{k \text{ zéros}} & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 0 \;\; 1 \\ & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

Ceci permet de calculer l'exponentielle d'une forme réduite de Jordan, qui se ramène au calcul de l'exponentielle d'un bloc de la forme

$$J_{i,k} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} = \lambda_i I + N_{i,k}$$

Notons $n_{i,k}$ sa taille.

On a alors

$$e^{tJ_{i,k}} = e^{t\lambda_i I} e^{tN_{i,k}} = e^{t\lambda_i} e^{tN_{i,k}}$$

Comme $N_{i,k}$ est nilpotente d'ordre $n_{i,k}$, on a

$$e^{tN_{i,k}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(tN_{i,k})^\ell}{\ell!} = \sum_{\ell=0}^{n_{i,k}-1} \frac{(tN_{i,k})^\ell}{\ell!} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n_{i,k}-1}}{(n_{i,k}-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & t^2/2 \\ & 0 & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

On a ainsi

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{tJ_{1,1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_{r,e_r}} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Corollaire Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Toute solution de $x'(t) = A x(t)$ dans $\mathbb{C}^n$ s'écrit sous la forme

$$x(t) = \sum_{i=1}^{r} e^{t\lambda_i} \left(\sum_{k=0}^{m_i - 1} t^k v_{i,k} \right) \quad \text{où } v_{i,k} \in \Gamma_i.$$

avec $m_i = \max_{1 \leq k \leq \ell_i} n_{i,k}$

Le terme $\sum_{k=0}^{m_i-1} t^k v_{i,k}$ est constant quand $m_i = 1$ (ce qui est le cas quand $\ell_i = p_i$).

On en déduit :

Théorème Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres.

On pose $\Gamma^s = \bigoplus_{Re(\lambda_i) < 0} \Gamma_i$ (espace stable), $\Gamma^u = \bigoplus_{Re(\lambda_i) > 0} \Gamma_i$ (espace instable), $\Gamma^c = \bigoplus_{Re(\lambda_i) = 0} \Gamma_i$ (espace indifférent).

Soit x une solution de $x'(t) = A x(t)$. Alors

① $x(0) \in \Gamma^s \iff \lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0$

② $x(0) \in \Gamma^u \iff \lim_{t \to -\infty} \|x(t)\| = 0$

③ $x(0) \in \Gamma^c \iff \exists M, C > 0$ tq pour $|t|$ assez grand,

$$\frac{1}{C} \|x(0)\| \leq \|x(t)\| \leq C |t|^M \|x(0)\|$$

Pour un $x(0)$ général, on le décompose en $x^s + x^u + x^c$.