Igor Kortchemski

Cours 9 : Théorie générale des équations différentielles

Plan : 1) Problème de Cauchy
2) Existence et unicité
3) Équations d'ordre n

1) Problème de Cauchy

On considère le système

$$\boxed{\begin{cases} x'(t) = f(\underbrace{t}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{x(t)}_{\in \mathbb{R}^n}) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}} \quad (\star)$$

appelé problème de Cauchy dont les données (ou paramètres) sont :

① Un ensemble ouvert $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

② Une application continue
$f : U \to \mathbb{R}^n$

③ Un couple $(t_0, x_0) \in U$

Très souvent U est de la forme $U = J \times \Omega$ avec $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

Remarque • $x(t)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

• Le système $(\mathcal{E})$ est en fait un système d'équations : si on note $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$
$f = (f_1, \ldots, f_n)$, alors

$$\boxed{\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}} \quad (*) \iff \begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^n$

Définition Une solution du problème de Cauchy $(*)$ est une fonction dérivable $u : I \to \mathbb{R}^n$ avec :

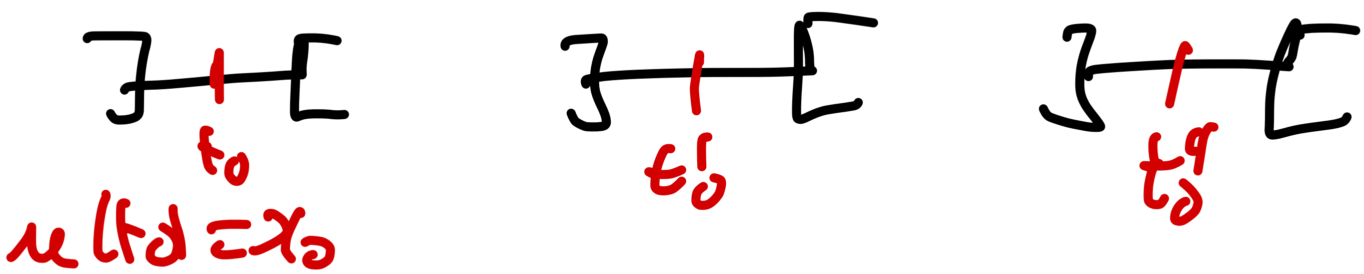
1. I intervalle $\neq \emptyset$ de $\mathbb{R}$ avec $t_0 \in I$, $u(t_0) = x_0$
2. $\forall t \in I$, $(t, u(t)) \in U$
3. $\forall t \in I$, $u'(t) = f(t, u(t))$

⚠ Ainsi, une solution est un COUPLE (I, u) :

et l'intervalle de définition I de la solution fait partie des inconnues.

<u>Question</u> : pourquoi on prend I intervalle et pas ouvert ?

<u>Réponse</u> : tout ouvert de $\mathbb{R}$ est union dénombrable d'intervalles ouverts et donc résoudre $(*)$ revient essentiellement à résoudre le problème sur chacun des intervalles.



Remarque f étant supposée continue toute solution de $u'(t) = f(t, u(t))$ est C^1

Il peut être utile de ré-écrire le problème de Cauchy sous forme intégrale :

Proposition Soit $I \neq \emptyset$ intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \to \mathbb{R}^n$ telle que $\forall t \in I$, $(t, u(t)) \in U$. Alors u est solution de $\boxed{\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}}$ $(*)$ ($t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$)

ssi u est continue et vérifie $\forall t \in I$, $u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$

<u>Preuve</u> : $\boxed{\Rightarrow}$ si u est solution on intègre entre t_0 et t la relation $u'(s) = f(s, u(s))$

$\boxed{\Leftarrow}$ si $\forall t \in I$

$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,ds$ on a bien $u(t_0) = x_0$ et par continuité de f,

$t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,ds$ est dérivable de dérivée $f(t, u(t))$

<u>Exemple 1</u>

- $x'(t) = f(t)$ avec $U = I \times \mathbb{R}$

ici f ne dépend que de t,

pas de $x(t)$: On a une unique solution de $\boxed{\begin{cases} x'(t) = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}}$ $(*)$

qui est $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds$

Exemple 2

$$\left|\begin{array}{l} x'(t) = \sqrt{\max(x(t), 0)} \\ x(0) = 0 \\ U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Ici $f(t, x) = \sqrt{\max(x, 0)}$

Il n'y a pas unicité des solutions ! Par exemple

$$\begin{cases} x(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ x(t) = \dfrac{t^2}{4} \mathbb{1}_{t \geq 0} \end{cases}$$ sont solutions

$$x^2(t) = \frac{t}{2} \mathbb{1}_{t \geq 0}$$

$$\sqrt{\max(x(t), 0)} = \frac{t}{2} \mathbb{1}_{t \geq 0}$$

2) Existence et unicité

L'objectif des EDO (équations différentielles ordinaires) est de modéliser des processus physiques qui sont souvent déterministes : si on connaît la dynamique d'un système et une condition initiale à $t = t_0$, alors l'évolution de ce système est unique pour $t \geq t_0$

(Par exemple : on lance une balle)

Cette notion de déterminisme se traduit en termes mathématiques par l'existence et l'unicité de solution, qui est donc une nécessité pour un modèle réaliste

- Pour l'unicité, il faut des conditions en plus
- Pour l'existence, la forme $x'(t) = f(t, x(t))$ avec f continue est importante :

Exemple $\begin{cases} x'(t)\,x(t) + t = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$

n'a pas de solutions.

En effet si x est solution, en intégrant :

$$\int_0^t x'(s)\,x(s)\,ds + \frac{t^2}{2} = 0$$

$$\text{"} \quad \frac{x(t)^2}{2}$$

Donc $\forall t \in I$, $x(t) = t = 0$, absurde.

[ici pas la forme $x'(t) = f(t, x(t))$]

Exemple On peut vérifier que $\begin{cases} x'(t) = -H(x(t)) \\ x(0) = 0 \end{cases}$

avec $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

n'a pas de solution (exercice)

[Ici $x'(t) = f(t, x(t))$ mais f pas continue]

Pour l'existence il se trouve que la continuité suffit !

Pour l'unicité, on introduit la notion de "semi lipschitz"

Définition Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue. On dit que f est semi-lipschitzienne si $\forall (t_0, x_0) \in U$ $\exists J$ intervalle ouvert contenant t_0 et W voisinage ouvert de x_0 avec $J \times W \subset U$

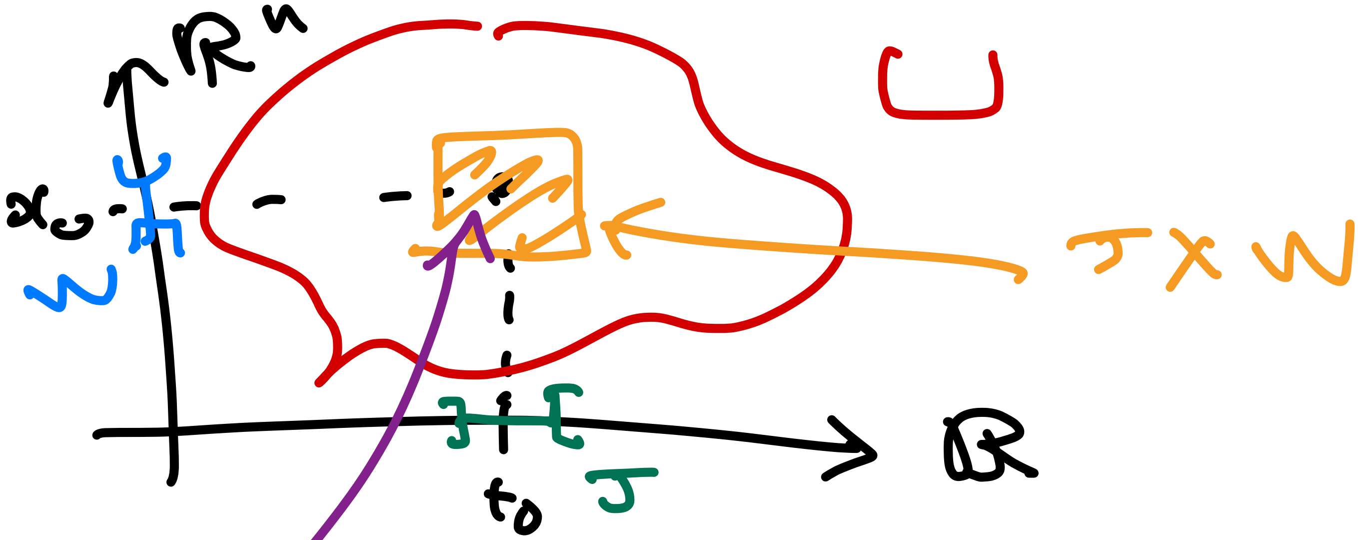
et $\exists L > 0$ tq

$\forall t \in J$, $\forall x, y \in W$,

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|$$

semi-lipschitzien

" localement lipschitz par rapport à la seconde variable de manière uniforme par rapport à la première



ici f est lipschitz pour la seconde variable uniformément pour la première

Rappel Dans $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes, on choisit la norme qu'on veut.

Exercice Vérifier que

$$f(t,x) = \sqrt{\max(x,0)}$$

n'est pas semi-lipschitz sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Proposition Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Alors f est semi-lipschitz

Pour le démontrer, on utilise (sans preuve) le résultat suivant (extension de l'inégalité des accroissements finis dans $\mathbb{R}$)

Théorème de la moyenne

Soient $a < b$ réels,

$f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues, dérivables sur $]a,b[$ avec $\|f'(t)\| \leq g'(t)$ $\forall t \in]a,b[$

alors $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$

(pour la preuve voir Wikipedia)

Dans la suite :

$\overline{B}(x,r) = \{ y : d(x,y) \leq r \}$

boule fermée de rayon r centrée en x

Preuve de la Proposition

Soit $(t_0, x_0) \in U$. Soit $\varepsilon > 0$ tq

$[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}(x_0, \varepsilon) \subset U$

Comme f est C^1, $\exists M > 0$ tq

$|||Df||| \leq M$ sur $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}(x_0, \varepsilon)$

différentielle de f.

Soit $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$

Posons $\left| \begin{array}{l} \varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \quad s \longmapsto f(t, sy + (1-s)x) \end{array} \right.$

Alors φ est C^1 et

$$\varphi'(s) = Df_{(t,\, sy+(1-s)x)}\big((0, x-y)\big)$$

Ainsi

$$\|\varphi'(s)\| \leq M \|x-y\|$$

Donc par le théorème de la moyenne

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| = \|\varphi(0) - \varphi(1)\| \leq M\|x-y\|$$

Théorème (Cauchy-Lipschitz local : existence et unicité locales) Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert

$f : U \to \mathbb{R}^n$ continue ET semi-lipschitz

Soit $(t_0, x_0) \in U$.

Soient $\eta, \rho, M, L > 0$ tels que :

- $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \overline{B}(x_0, \rho) \subset U$
- $\|f(t,x)\| \leq M$ pour tout $(t,x) \in [t_0-\eta, t_0+\eta] \times \overline{B}(x_0,\rho)$
- $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \|x-y\|$ $\forall t \in [t_0-\eta, t_0+\eta]$, $\forall x,y \in \overline{B}(x_0,\rho)$

Alors $\forall\, \varepsilon < \min(\eta, \frac{\rho}{M})$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

sur $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ admet une unique solution.

Remarque : l'existence de $\eta, \rho, M, L > 0$ est donné par le fait que f est semi-lipschitz ces valeurs permettent d'avoir un contrôle sur la taille de l'intervalle sur lequel on a existence et unicité.

Version condensée Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue ET semi-lipschitz. Soit $(t_0, x_0) \in U$.

Alors $\exists \varepsilon > 0$ tq le problème de

Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

sur $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ admet une unique solution.

Exemple $f(t,x) = \mathbb{1}_{t \neq 0} \cdot x$ est semi-lipschitz mais pas continue

Idée de la preuve appliquer le théorème du point fixe de Picard : si (X,d) espace métrique complet et $T : X \longrightarrow X$ contraction, c'est-à-dire

$\exists\, 0 < c < 1$, $\forall x, y \in X$,
$d(T(x), T(y)) \leq c\, d(x,y)$,
alors T admet un unique point fixe noté x_0 et
$\forall x \in X$, $T^n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$

Quel espace X, quel T ?

<u>idée</u> : formulation intégrale

$$T : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$$
$$u \longmapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$$

<u>Problème</u> en général T n'est pas une contraction : il faut faire attention au choix de l'espace

Preuve du théorème $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue semi-lipschitz

$(t_0, x_0) \in U$ • $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \overline{B}(x_0, \rho) \subset U$

• $\|f(t,x)\| \leq M$ pour tout $(t,x) \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \overline{B}(x_0, \rho)$

• $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \|x - y\|$ $\forall t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$, $\forall x, y \in \overline{B}(x_0, \rho)$

Soit $\varepsilon < \min\left(\eta, \frac{\rho}{M}\right)$. Soit

$X = \mathcal{C}([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \overline{B}(x_0, \rho))$

muni de $\|\cdot\|_\infty$.

Etape 1 On vérifie que

$$T : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ u & \longmapsto & (Tu)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \end{array}$$

est bien définie

Pour $u \in X$ on a pour

$t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon$

$$\|(Tu)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \right\|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s,u(s))\|\, ds$$

$$\leq |t-t_0|\, M$$

car comme $u \in X$, $u(s) \in \overline{B}(x_0,\rho)$

$$\leq \varepsilon M < \rho$$

On a bien $(Tu)(t) \in \overline{B}(x_0,\rho)$

Étape 2 On regarde si T est contractante.

$$\|Tu - Tv\|_\infty$$

$$\leq \sup_{t_0-\varepsilon \leq t \leq t_0+\varepsilon} \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|\, ds \right|$$

$$\overset{(*)}{\leq} \sup_{t_0-\varepsilon \leq t \leq t_0+\varepsilon} \left| \int_{t_0}^{t} L \|u(s) - v(s)\|\, ds \right|$$

$$\leq \varepsilon L\, \|u-v\|_\infty .$$

Ainsi, T est lipschitz mais pas forcément contractante

(On peut avoir $\varepsilon L > 1$).

Idée : itérer T (méthode de "bootstrap"). En effet on montre aisément par récurrence que $\forall t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$, $\forall u, v \in X$, $\forall n \geq 0$,

$$\|T^n u(t) - T^n v(t)\| \leq \frac{L^n \cdot |t-t_0|^n}{n!} \cdot \|u-v\|_\infty$$

c'est vrai pour $n=1$, et si c'est vrai au rang n, alors

$$\|T^{n+1} u(t) - T^{n+1} v(t)\| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} \|T^n u(s) - T^n v(s)\| ds \right|$$

$$\leq \frac{L^{n+1} \, |t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!} \|u-v\|_\infty \quad \text{par } (*)$$

Ainsi, T^n est $\frac{(L\varepsilon)^n}{n!}$ lipschitzienne.

Mais $\frac{(L\varepsilon)^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

On peut donc choisir n_0 tel que T^{n_0} est contractant $\left(\frac{(L\varepsilon)^{n_0}}{(n_0)!} < 1\right)$

D'après le théorème de Picard, T^{n_0} admet un unique point fixe noté u.

Mais Tu est aussi point fixe car :

$$T^{n_0}(Tu) = T(T^{n_0}u) = Tu$$

Donc $Tu = u$.

Donc u est solution du problème

de Cauchy.

- Pour conclure, pour montrer l'unicité, on montre que si $v : [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ est solution du problème de Cauchy, alors $v \in X$ c'est-à-dire $\forall t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ $v(t) \in \overline{B}(x_0, \rho)$.

En effet on alors $Tv = v$ Et donc $u = v$ par unicité du point fixe dans X

Par l'absurde, on suppose que $\exists\, t_1 \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ tel que $\|v(t_1) - x_0\| > \rho$

Pour simplifier supposons $t_1 > t_0$

Soit alors

$t_1' = \inf\{t > t_0 : \|v(t) - x_0\| = \rho\}$

Alors $\forall t \in [t_0, t_1']$, $v(t) \in \overline{B}(t_0, \rho)$

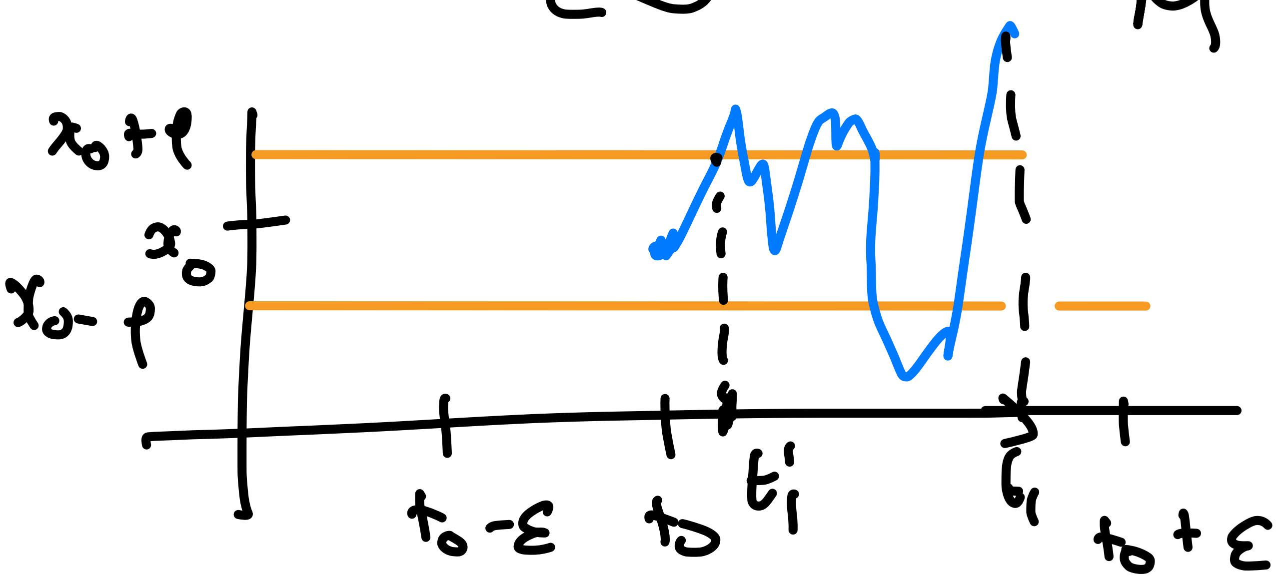
Alors

$$\rho = \|v(t_1') - x_0\| \leq \left| \int_{t_0}^{t_1'} \|g(s, v(s))\| ds \right|$$

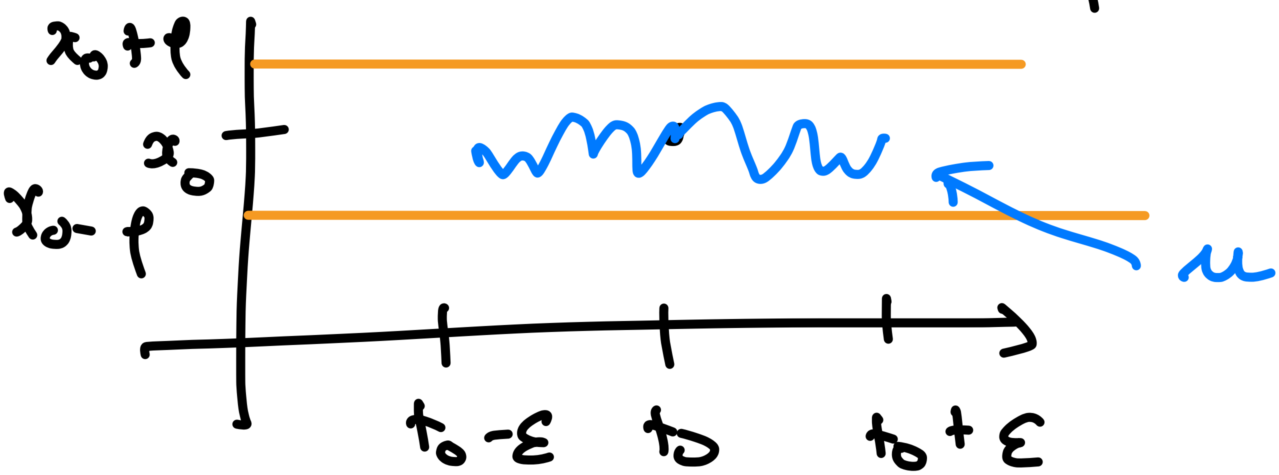
$$\leq \varepsilon M$$

Cela contredit $\varepsilon < \frac{\rho}{M}$

$\sim$



Remarque Avec les notations précédentes, on dit que $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \times \overline{B}(x_0, \rho)$ est un cylindre de sécurité : la solution n'en sort pas



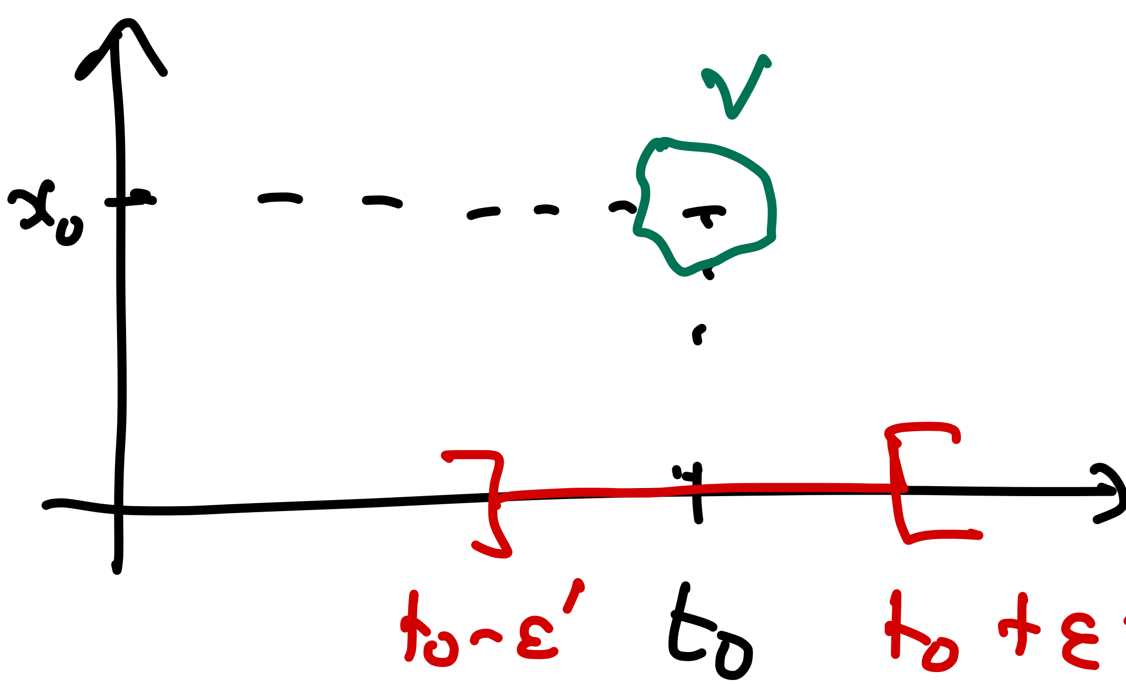
Corollaire Sous les mêmes hypothèses $\forall (t_0, x_0) \in W$, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) et $\varepsilon' > 0$ tel que $\forall (t_0', x_0') \in V$

le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t'_0) = x'_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur $[t'_0 - \varepsilon', t'_0 + \varepsilon']$

ici : ε' ne dépend pas de (t'_0, x'_0) :



toute condition initiale dans V donne une solution définie sur $]t_0 - \varepsilon', t_0 + \varepsilon'[$

(dans la preuve précédente
on prend
$V =]t_0 - \frac{\varepsilon}{2}, t_0 + \frac{\varepsilon}{2}[\times B(x_0, \frac{\rho}{2})$
et $\varepsilon' < \frac{1}{2} \min(\rho, M)$)

Remarques :

- la suite de fonctions définies par récurrence

$$\begin{cases} u_0(t) = x_0 \\ u_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s))\,ds \end{cases}$$

converge uniformément vers la solution du problème de Cauchy sur tout intervalle suffisamment petit contenant x_0.

- On montre par récurrence que si f est de classe C^k alors les solutions sont de classe C^{k+1}. Ceci permet par exemple de calculer des développements limités

<u>Exemple</u> : Calculons le DL en 0 à l'ordre 2 de la solution de

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{t+2}{t^2+x(t)^2} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

On prend $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$g(t,x) = \frac{t+2}{t^2+x^2} \quad \text{sur } U$$

de classe C^1, donc semi-lipschitz

Donc par Cauchy-Lipschitz local on a une unique solution u définie au voisinage

On a $u(0) = 1$

$$u'(0) = \frac{0+2}{0^2+1^2} = 2$$

En dérivant

$u''(t)$

$$= \frac{t^2+u(t)^2 - (t+2)(2t + 2u(t)u'(t))}{(t^2+u(t)^2)^2}$$

Donc $u''(0) = -7$.

Ainsi

$$u(t) = u(0) + u'(0)t + \frac{u''(0)}{2}t^2 + o(t^2)$$

$$= 1 + 2t - \frac{7}{2}t^2 + o(t^2)$$

3) Équations d'ordre n

$\varphi : U \to \mathbb{R}$ avec $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert. On suppose φ semi-lipschitz.

$(\ast\ast)$ $y^{(n)}(t) = \varphi(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$

Équation différentielle d'ordre n.

Il se trouve que cette équation est équivalente à une équation d'ordre 1 !

Proposition (✱✱) se réécrit, en posant

$x = (y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$,

$x'(t) = f(t, x(t))$ avec

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(t, x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_2, x_3, \dots, x_n, \varphi(t, x_1, \dots, x_n))$$

De plus f est semi-lipschitz

Preuve : • On a

$x'(t) = (y'(t), \dots, y^{(n)}(t))$

et

$f(t, x(t)) = (y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t), \varphi(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$

D'où $x'(t) = f(t, x(t))$.

• Soit $(t_0, x_0) \in \Omega$. Comme φ est semi-lipschitz, $\exists$ I voisinage de t_0, W voisinage de x_0 tels que $I \times W \subset \Omega$ et $\exists L > 0$ tel que

$\forall t \in I$, $\forall x, y \in W$,

$\|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| \leq L \|x - y\|$

Prenons pour $\|\cdot\|$ la norme euclidiane. Alors pour $t \in I$, $x, y \in W$

$$\|g(t,x) - g(t,y)\|^2 = \sum_{i=2}^{n} |x_i - y_i|^2 + \|\varphi(t,x) - \varphi(t,y)\|^2$$

car $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(t, x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_2, x_3, \ldots, x_n, \varphi(t, x_1, \ldots, x_n))$

$$\leq \underbrace{\sum_{i=2}^{n} |x_i - y_i|^2}_{\leq \|x-y\|^2} + L^2 \|x-y\|^2$$

$$\leq (1 + L^2) \|x-y\|^2$$

Prochain cours
sur place

⚠ Mercredi 5
juin

15h55 – 18h20

⚠