Igor Kortchemski

Cours 8 : Compléments probabilistes

(pas au programme de l'examen)

Plan : 1) Théorème de représentation de Skorokhod

2) Tension, théorème de Prokhorov

3) Tribu cylindrique et fonctions aléatoires

1) Théorème de représentation de Skorokhod

On présente ici un résultat qui permet en quelque sorte de "transformer" une convergence en loi en convergence p.s.

Théorème Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, X des v.a. réelles telles que $X_n \xrightarrow{(d)} X$.
Alors il existe un espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ et des v.a. $(Y_n)_{n\geq 1}, Y : \Omega' \to \mathbb{R}$ tq :

1. $\forall n \geq 1$ fixé $X_n \overset{(d)}{=} Y_n$ et $X \overset{(d)}{=} Y$
2. $Y_n \xrightarrow{p.s} Y$

__Preuve__: Pour simplifier, on suppose que F_{X_n}, F_X les fonctions de répartition de X_n et X sont continues et strictement croissantes, et donc des bijections de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.

(Dans le cas général, on utilise l'inverse généralisé introduit dans un cours précédent).

__Idée__: On pose

$(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}') = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$

et $U : \Omega' \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x$

Ainsi, U suit la loi uniforme sur $]0,1[$. On définit :

$$Y_n = F_{X_n}^{-1}(U), \quad Y = F^{-1}(U)$$

Alors

- $\mathbb{P}(Y_n \leq u) = \mathbb{P}(F_{X_n}^{-1}(U) \leq u)$

$$= \mathbb{P}(U \leq F_{X_n}(u))$$

$$= F_{X_n}(u)$$

Ainsi Y_n et X_n ont même fonction de répartition et donc $\boxed{X_n \overset{(d)}{=} Y_n.}$

De même $\boxed{X \overset{(d)}{=} Y.}$

- Comme $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$, on sait que $F_{X_n} \to F$ simplement (car F continue en tout point) et donc $F^{-1}_{X_n} \longrightarrow F^{-1}$ simplement.

Donc $Y_n \longrightarrow Y$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Donc $\boxed{Y_n \xrightarrow{p.s} Y}$

$\sim$

⚠ ⚠ Toute information sur les lois jointes des X_n est perdue ($X_n \perp\!\!\!\perp \not\Rightarrow Y_n \perp\!\!\!\perp$)

Remarque Ce résultat est plus généralement vrai dans des espaces métriques séparables (ayant une suite dénombrable dense) mais la preuve est plus délicate

Application Soit $(X_n)_{n\geq 1}$, X des variables aléatoires réelles avec $X_n \xrightarrow{(d)} X$. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable avec p.s f continue en X ($\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : f \text{ continue en } X(\omega)\}) = 1$)

Alors $f(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} f(X)$

(généralisation du principe de composition à des fonctions non partout continues.

Exemple Si $X_n \xrightarrow{(d)} X$ et $X > 0$ p.s alors $\frac{1}{X_n} \xrightarrow{(d)} \frac{1}{X}$

Preuve de l'application

D'après le thm de représentation de Skorokhod, $\exists\, Y_n, Y$ définies sur le même espace de probabilité avec :

- $\forall n \geq 1,\ X_n \overset{(d)}{=} Y_n,\quad X \overset{(d)}{=} Y$
- $Y_n \xrightarrow{p.s.} Y$.

Comme $X \overset{(d)}{=} Y$ et p.s. f continue en X, on a p.s. f continue en Y.

Donc p.s. $f(Y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(Y)$

Donc

$$\begin{array}{ccc} f(Y_n) & \xrightarrow{loi} & f(Y) \\ \| \text{ loi} & & \| \text{ loi} \\ f(X_n) & & f(X) \end{array}$$

$\sim$

2) Tension, théorème de Prokhorov

La tension est en quelque sorte l'équivalent probabiliste de la compacité.

Définition. • On dit qu'une famille $(\mu_i)_{i\in I}$ de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ est <u>tendue</u> si $\forall \varepsilon>0$, $\exists A>0$,

$$\sup_{i\in I} \mu_i(\mathbb{R}\setminus[-A,A])\leq \varepsilon$$

• On dit qu'une famille de v.a. réelles $(X_i)_{i\in I}$ est <u>tendue</u> si leurs lois le sont, c'est-à-dire

$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0,$

$\forall i \in I \quad \mathbb{P}(X_i \notin [-A, A]) \leq \varepsilon$

$= \mathbb{P}(|X_i| > A)$

Remarque Une v.a. est toujours tendue car

$$\lim_{A \to \infty} \mathbb{P}(X \notin [-A, A]) = 0$$

Exemple Si $(X_i)_{i \in I}$ est borné dans L^1 (i.e. $\exists c > 0$ tq $\forall i \in I$, $\mathbb{E}[|X_i|] \leq c$), alors $(X_i)_{i \in I}$ est tendue.

en effet

$$\mathbb{P}(|X_i| \geq A) \leq \frac{c}{A}$$

par inégalité de Markov

Remarque Une <u>suite</u> (= famille dénombrable) $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a. est tendue ssi

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists A>0,\ \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n|>A)\leq \varepsilon$$

Ceci provient du fait qu'un nombre fini de v.a. est tendu

Théorème (Prokhorov)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. réelles. Alors ① $\Leftrightarrow$ ② :

① $(X_n)_{n\geq 1}$ tendue

② $\forall$ sous-suite φ, $\exists$ sous-suite ψ avec $(X_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\geq 1}$ qui converge en loi intuition : tension $\Leftrightarrow$ $\exists$ sous-suites qui convergent en loi

Preuve du théorème de Prokhorov

On note μ_n = loi de X_n

2 $\Rightarrow$ 1 : On suppose 2. On raisonne par l'absurde. Alors $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall n \geq 1$, (*)

$$\mu_{\phi(n)}(\mathbb{R} \setminus [-n, n]) > \varepsilon$$

avec ϕ sous suite

Par hypothèse 2 $\exists \varphi$ sous-suite, X v.a. tq

$$X_{\varphi \circ \varphi(n)} \xrightarrow{loi} X$$

Soit $x > 0$ grand avec $\mathbb{P}(X = \pm x) = 0$

Alors pour n assez grand

$[-x, x] \subset [-\varphi(n), \varphi(n)]$ donc

$\mathbb{P}(|X| \leq x)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_{\varphi\circ\psi(n)}| \leq x)$

(car $\mathbb{P}(X = \pm x) = 0$)

$\leq \liminf\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_{\varphi\circ\psi(n)}| \leq \varphi(n))$

$= \liminf\limits_{n\to\infty} \mu_{\phi\circ\psi(n)}([-\varphi(n), \varphi(n)])$

$\leq 1-\varepsilon$ par $(*)$

On fait $x \to \infty$:

$\mathbb{P}(|X| < \infty) \leq 1-\varepsilon$. Absurde

① $(X_n)_{n\geq 1}$ tendue ② $\forall$ sous-suite φ, $\exists$ sous-suite ψ avec $(X_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\geq 1}$ qui converge en loi

On montre ① $\Rightarrow$ ②

Quitte à travailler avec $X_{\varphi(n)}$, on peut supposer $\varphi(n)=n$.

Etape 1 : identifier une limite potentielle. Soit F_n la fonction de répartition de X_n.

$\forall q\in\mathbb{Q}$, $(F_n(q))_{n\geq 1}$ est bornée (à valeurs dans $[0,1]$)

Par argument diagonal, $\exists\, \psi$ sous-suite telle que $\forall q\in\mathbb{Q}$, $(F_{\psi(n)}(q))_{n\geq 1}$ converge vers une limite notée $F_\infty(q)$

On pose alors $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \inf \{ F_\infty(q) : q > x, q \in \mathbb{Q} \}$$

On vérifie que F est croissante, continue à droite.

Etape 2 F est la fonction de répartition d'une v.a.

Pour cela il suffit de montrer

$$\lim_{+\infty} F = 1, \quad \lim_{-\infty} F = 0$$

Pour cela soit $\varepsilon > 0$, $A > 0$ avec $\sup_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > A) \leq \varepsilon$.

Soit $q \in \mathbb{Q}$, $q > A$. Alors

$$\mathbb{P}(X_n \leq q) \geq \mathbb{P}(X_n \leq A)$$
$$\geq 1 - \varepsilon.$$

Donc $F_{\varphi(n)}(q) \geqslant 1-\varepsilon$.

en faisant $n \to \infty$ on obtient

$F_\infty(q) \geqslant 1-\varepsilon$.

En prenant l'inf sur $q > A$, $q \in \mathbb{Q}$, on obtient

$$F(A) \geqslant 1-\varepsilon.$$

Donc $\lim\limits_{+\infty} F = 1$

On montre de même $\lim\limits_{-\infty} F = 0$

<u>Conclusion</u> : $\exists X$ v.a tq

$$F = F_X.$$

<u>Etape 3</u> On vérifie que

$$X_{\varphi(n)} \xrightarrow{loi} X$$

On utilise la caractérisation avec les fonctions de répartition

Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $\mathbb{P}(X = x) = 0$

Ainsi F est continue en x.

<u>Rappel</u> : $F(x) = \inf \{ F_\infty(q) : q > x, q \in \mathbb{Q} \}$

Donc :

$$F(x) = \sup \{ F_\infty(q) : q < x : q \in \mathbb{Q} \}$$

(exercice : utiliser $F(x) = \lim_{x' \nearrow x} F(x')$)

Ainsi, si $q < x < q'$ avec $q, q' \in \mathbb{R}$

on a

$$F_\infty(q) = \lim_{n \to \infty} F_{\varphi(n)}(q)$$

$$\leq \liminf_{n \to \infty} F_{\varphi(n)}(x)$$

$$\leq \limsup_{n \to \infty} F_{\varphi(n)}(x)$$

$$\leq \limsup_{n \to \infty} F_{\varphi(n)}(q')$$

$$= F_\infty(q')$$

On fait $\varphi \uparrow x$ $q' y x$ et on obtient

$$F(x) \leq \liminf_{n \to \infty} F_{\varphi(n)}(x)$$

$$\leq \limsup_{n \to \infty} F_{\varphi(n)}(x)$$

$$\leq F(x).$$

<u>Conclusion</u> tout est $=$

et donc $F_{\varphi(n)}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} F(x)$

et ce $\forall x$ où F est continue en x.

Ainsi $X_{\varphi(n)} \xrightarrow{\text{loi}} X$.

∞

Lemme des sous-sous-suites pour les v.a.

Soit X_n, X v.a. Alors ① $\Leftrightarrow$ ② :

① $X_n \xrightarrow{loi} X$

② $\forall$ sous-suite φ, $\exists$ sous-suite ψ tq $X_{\varphi \circ \psi(n)} \xrightarrow{loi} X$

(⚠ différence avec Prokhorov, dans le théorème de Prokhorov la v.a. limite n'est pas spécifiée)

Preuve

① $\Rightarrow$ ② clair

② $\Rightarrow$ ① On suppose ②

et on raisonne par l'absurde en supposant $X_n \overset{(d)}{\not\longrightarrow} X$.

Alors $\exists f \in C_b(\mathbb{R})$ telle que $\mathbb{E}[f(X_n)] \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} \mathbb{E}[f(X)]$

Donc $\exists \varepsilon > 0$, $\exists \varphi$ sous-suite telle que $\forall n \geq 1$

$$|\mathbb{E}[f(X_{\varphi(n)})] - \mathbb{E}[f(X)]| \underset{(*)}{\geq} \varepsilon$$

Or par ② $\exists \psi$ sous-suite telle que $X_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow{\text{loi}} X$

Donc

$$\mathbb{E}[f(X_{\varphi(\psi(n))})] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(X)]$$

Contradiction avec (✱) !

~

Corollaire Soit X_n, X v.a. dans $\mathbb{R}$. On a ① $\Leftrightarrow$ ② :

① $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$

② ⓐ (X_n) tendue

et ⓑ si $X_{\varphi(n)} \xrightarrow{\text{loi}} Y$ avec φ sous-suite et Y v.a., alors $Y \overset{\text{loi}}{=} X$

En topologie, l'analogue est : dans un compact, une suite ayant une seule valeur d'adhérence converge.

Preuve :

1 $\Rightarrow$ 2

(a) par théorème de Prokhorov

(b) clair : si $X_n \xrightarrow{loi} X$, $X_n \xrightarrow{loi} Y$

alors $X \overset{loi}{=} Y$.

2 $\Rightarrow$ 1 On raisonne par l'absurde : par le lemme précédent, $\exists \varphi$ sous-suite avec $\forall$ sous-suite ψ

$$X_{\varphi(\psi(n))} \overset{(d)}{\not\longrightarrow} X \quad (*)$$

Or $(X_{\varphi(n)})$ est tendue donc $\exists \psi$ sous-suite, Y v.a avec $X_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow{(d)} Y$

Mais alors par (b) $Y \overset{(d)}{=} X$

Donc $X_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow{\text{loi}} X$

Contradiction avec $(*)$!

Rappel

Rappel :

Corollaire Soit X_n, X v.a. dans $\mathbb{R}$. On a ① $\Leftrightarrow$ ② :

① $X_n \xrightarrow{loi} X$

② ⓐ (X_n) tendue
et ⓑ si $X_{\varphi(n)} \xrightarrow{loi} Y$ avec φ sous-suite et Y v.a, alors $Y \overset{loi}{=} X$

En pratique, le corollaire précédent est <u>TRÈS</u> pratique pour montrer que $X_n \xrightarrow{(d)} X$ avec le raisonnement suivant :

ⓐ On montre que (X_n) est tendue [TENSION]

ⓑ On suppose

$X_{\varphi(n)} \xrightarrow{(d)} Y$ avec φ sous-suite

Y v.a et on montre que

$$Y \overset{(d)}{=} X$$

[UNICITÉ DE LA LIMITE]

Souvent, on montre cela en utilisant un outil qui caractérise la loi, par exemple:

- fonction caractéristique
- fonction de répartition.

<u>Remarque</u> tout ceci reste vrai dans des espaces métriques plus généraux, dit <u>polonais</u> (complets,

ayant une suite dénombrable dense)

3) Tribu cylindrique et fonctions aléatoires

Pour considérer des fonctions aléatoires, c'est-à-dire des variables aléatoires à valeurs dans des espaces fonctionnels, souvent appelés processus stochastiques il faut définir une tribu sur ces espaces !

C'est le but de la <u>tribu cylindrique</u>

Pour simplifier, on se concentre sur $\mathbb{R}^{[0,1]} = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonction $\}$.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité.

<u>Rappels</u> Si $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{A})$ sont deux espaces mesurés, on rappelle que :

- si $f : E \to F$

$$\sigma(f) = \{ f^{-1}(B) : B \in \mathcal{A} \}$$

est la tribu engendrée par f, plus petite tribu sur E qui rend

$$f : E \longrightarrow (F, \mathcal{A}) \text{ mesurables}$$

• si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de fonctions de E dans F,

$\sigma(f_i : i\in I)$ est la plus petite tribu sur E qui rend TOUTES les $f_i : E \to (F, \mathcal{F})$ mesurables. Ainsi

$\sigma(f_i : i \in I)$

$= \sigma\left(\{ f_i^{-1}(B_i) : i\in I, B_i \in \mathcal{F} \}\right)$

est la plus petite tribu contenant tous les $f_i^{-1}(B_i)$ pour $i\in I$, $B_i \in \mathcal{F}$

⚠ Quand $\mathrm{Card}(I) \geq 2$,
en général
$$\{ f_i^{-1}(B_i) : i \in I, B_i \in \mathcal{A} \}$$
n'est pas une tribu

Définition (tribu cylindrique)

On considère
$$\mathbb{R}^{[0,1]} = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \}$$
Pour $0 \leq t \leq 1$ on pose
$$\begin{aligned} \pi_t : \mathbb{R}^{[0,1]} &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(t) \end{aligned}$$
("projection")

On définit sur $\mathbb{R}^{[0,1]}$ la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes [0,1]}$
$$= \sigma(\pi_t : 0 \leq t \leq 1)$$

$$= \sigma\left(\pi_t^{-1}(B) : 0 \leq t \leq 1, \; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right)$$

qui est la plus petite tribu pour laquelle toutes les π_t, $0 \leq t \leq 1$, sont mesurables

<u>Définition</u> (cylindres)

Les ensembles de la forme

$$\pi_{t_1}^{-1}(A_1) \cap \pi_{t_2}^{-1}(A_2) \cap \dots \cap \pi_{t_k}^{-1}(A_k)$$

$$= \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} : f(t_1) \in A_1, \; f(t_2) \in A_2, \; \dots, \; f(t_k) \in A_k \}$$

pour $0 \leq t_1, \dots, \leq t_k \leq 1$ et $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont appelés <u>cylindres</u>

<u>Point clé</u> les cylindres forment un π-système (stable par intersection finie) générateur contenant $\mathbb{R}^{[0,1]}$.

<u>Exemple</u> $\{f : [0,1] \to \mathbb{R}$ avec $-1 < f(\tfrac{1}{2}) < 2,\ f(1) > \sqrt{2}\}$

$$= \pi_{\frac{1}{2}}^{-1}(]-1, 2[) \cap \pi_1^{-1}(]\sqrt{2}, +\infty[)$$

est un cylindre

Proposition Une fonction

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow \left(\mathbb{R}^{[0,1]}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes[0,1]}\right)$$

$$\omega \longmapsto (X_t(\omega))_{0 \leq t \leq 1}$$

est mesurable ssi

$\forall\, 0 \leq t \leq 1$

$$(\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

$$\omega \longmapsto X_t(\omega)$$

est mesurable

(idée : pas de problème subtil de mesurabilité quand on travaille avec la tribu cylindrique, aussi appelée tribu produit)

<u>Preuve</u>

$\boxed{\Rightarrow}$ Si X est mesurable, $X_t(\omega) = \pi_t \circ X(\omega)$ est mesurable comme composée de fonctions mesurables

$\boxed{\Leftarrow}$ Puisque les cylindres engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes [0,1]}$, en supposant $\omega \mapsto X_t(\omega)$ mesurable $\forall t \in [0,1]$, il suffit de montrer que $X^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ pour tout cylindre C.

Mais si

$C = \pi_{t_1}^{-1}(A_1) \cap \dots \cap \pi_{t_k}^{-1}(A_k)$

$X^{-1}(C) = \{\omega \in \Omega : X_{t_1}(\omega) \in A_1\}$

$\cap \dots \cap \{\omega \in \Omega : X_{t_k} \in A_k\}$

$\in \mathcal{A}$ par hypothèse

∞

Conséquences probabilistes

- $(X_t)_{0 \le t \le 1}$ est une v.a. à valeurs dans $(\mathbb{R}^{[0,1]}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes[0,1]})$ ssi $\forall t \in [0,1]$, X_t est une v.a. réelles

- Si $(X_t)_{0\leq t\leq 1}$ est une v.a. à valeurs dans $(\mathbb{R}^{[0,1]}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes[0,1]})$ sa loi est caractérisée par les probabilités des cylindres :

$$\mathbb{P}(X_{t_1}\in A_1, \dots, X_{t_k}\in A_k)$$

appelées les <u>marginales fini-dimensionnelles</u> (f.d.)

En particulier, deux v.a. $(X_t)_{0\leq t\leq 1}$ et $(Y_t)_{0\leq t\leq 1}$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{[0,1]}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes[0,1]})$ ont même loi ssi

$\forall\, 0\leq t_1\leq \cdots \leq t_k\leq 1$

$$(X_{t_1},\dots, X_{t_k}) \overset{loi}{=} (Y_{t_1},\dots, Y_{t_k})$$

Proposition Soit $(X_t)_{0\le t\le 1}$ et $(Y_t)_{0\le t\le 1}$ deux v.a. à valeurs dans $(\mathbb{R}^{[0,1]}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes[0,1]})$ définies sur le même espace de probabilité. On a

① $\Leftrightarrow$ ② :

① $(X_t)_{0\le t\le 1} \perp\!\!\!\perp (Y_t)_{0\le t\le 1}$

② $\forall\, 0\le s_1\le \dots \le s_n \le 1$
$\forall\, 0\le t_1 \le \dots \le t_k \le 1$

$$(X_{s_1}, \dots, X_{s_n}) \perp\!\!\!\perp (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k})$$

idée de la preuve :

① $\Rightarrow$ ② provient

du principe de composition

$\left(f \mapsto (f(a_1), \ldots, f(a_\ell)) \right.$
est mesurable)

② ⇒ ① Par hypothèse,
en notant

$X = (X_t)_{0 \le t \le 1}$, $Y = (Y_t)_{0 \le t \le 1}$
on a

$$P(X \in C, Y \in C')$$
$$= P(X \in C)\, P(Y \in C')$$

pour tous cylindres C, C'

On conclut en utilisant
le critère d'$\perp\!\!\!\perp$ avec les
π-systèmes générateurs.

Très utile pour :

- les chaînes de Markov
- le mouvement bro