Igor Kortchemski

Cours 6 : Convergence en loi, suite.

Plan : 1) Restriction des fonctions tests

2) Applications

3) } Fonctions caractéristiques
4) }

1) Restriction des fonctions tests

Rappel $X_n \xrightarrow{(d)} X$ si

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow{(*)} \mathbb{E}[f(X)]$$

$\forall f$ continue bornée.

But : trouver des ensembles de fonctions plus petit que $C_b(\mathbb{R}^d)$ pour lequel vérifier $(*)$ suffit à avoir convergence en loi

Rappel (point (2) de Porte-manteau)

Si $(*)$ a lieu pour toute fonction lipschitzienne bornée, alors $X_n \xrightarrow{(d)} X$.

Notation $C_c(\mathbb{R}^d) = \{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continues à support compact $\}$

Proposition Soit X_n, X v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Soit $\mathcal{H} \subset C_b(\mathbb{R}^d)$ tel que l'adhérence de $\mathcal{H}$ contient toutes les fonctions de $C_c(\mathbb{R}^d)$. Alors (1) $\Leftrightarrow$ (2)

(1) $\forall f \in \mathcal{H}$, $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$

(2) $\forall f \in C_b(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)]$$

(c'est-à-dire $X_n \xrightarrow{(d)} X$).

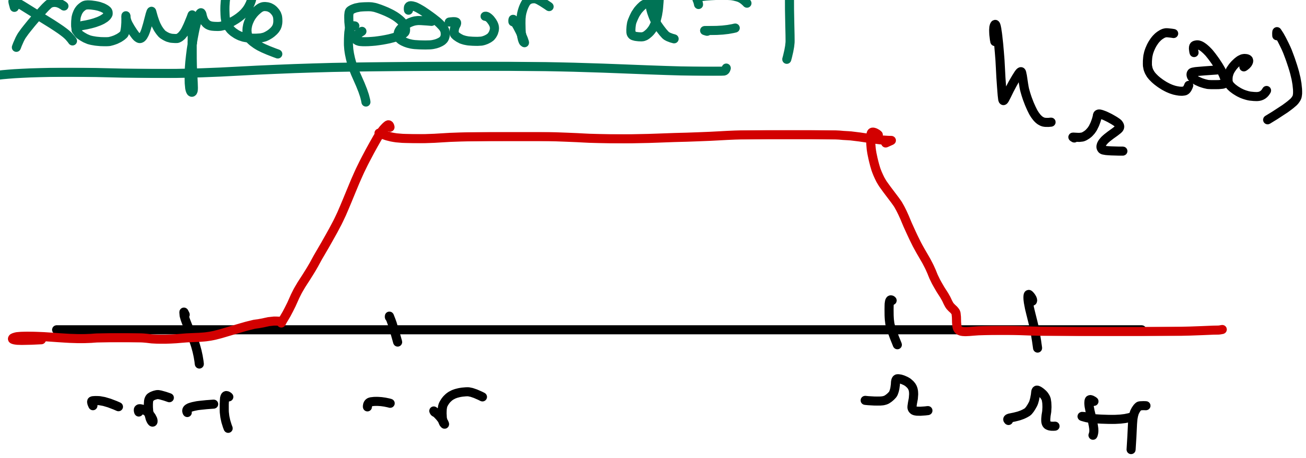
Preuve Un sens est clair 2) $\Rightarrow$ 1) car $\mathcal{H} \subset C_b(\mathbb{R}^d)$

(1) $\Rightarrow$ (2) idée : argument de troncature pour transformer une fonction continue bornée en fonction continue à support compact.

Étape 1 On montre le résultat pour $H = \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$

Soit alors $h_r : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ continue avec $h_r(x) = 1$ pour $\|x\| \leq r$ et $h_r(x) = 0$ pour $\|x\| \geq r+1$

exemple pour $d=1$



$(r = r)$

Soit $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$. On remarque que $h_r f \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Ainsi :

$$|\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| \leq$$

$$|\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[h_r(X_n) f(X_n)]| \quad ①$$

$$+ |\mathbb{E}[h_r(X_n) f(X_n)] - \mathbb{E}[h_r(X) f(X)]| \quad ②$$

$$+ |\mathbb{E}[h_r(X) f(X)] - \mathbb{E}[f(X)]| \quad ③$$

$$① \leq \|f\|_\infty \underbrace{\mathbb{E}[1 - h_r(X_n)]}_{= 1 - \mathbb{E}[h_r(X_n)]}$$

Or $h_r \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Donc

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[h_r(X_n)] = \mathbb{E}[h_r(X)]$$

Rappel : on suppose $\forall h \in H$, $\mathbb{E}[h(X_n)] \longrightarrow \mathbb{E}[h(X)]$

Donc

$$\limsup_{n\to\infty} ① \leq \|f\|_\infty \left(1 - \mathbb{E}[h_r(X)]\right)$$

<u>Pour ②</u> : $h_r \cdot f \in C_c(\mathbb{R}^d)$.

Donc $② \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

<u>Pour ③</u> : $③ \leq \|f\|_\infty \left(1 - \mathbb{E}[h_r(X)]\right)$

Ainsi,

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)] \right|$$

$$\leq 2 \|f\|_\infty \left(1 - \mathbb{E}[h_r(X)]\right)$$

$\forall r > 0$.

On fait $r \to \infty$.

Rappel : $h_r(x) = 1$ pour $\|x\| \leq r$ et $0 \leq h_r \leq 1$.

Ainsi par convergence dominée,

$$\mathbb{E}[h_r(X)] \xrightarrow[r \to \infty]{} 1$$

Ceci conclut étape 1.

Étape 2 : On suppose que

$\forall f \in H$, $\mathbb{E}[f(X_n)] \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)]$

où l'adhérence de H contient $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$.

On montre que ceci implique

$\forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$, ce qui permet de conclure par l'étape 1.

Pour cela, soit $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, soit $\varepsilon > 0$. Par ~~supposition~~, $\exists g \in H$ avec $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$.

Alors

$$|\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| \leq$$

$$\mathbb{E}[|f(X_n) - g(X_n)|$$
$$+ |\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(X)]|$$
$$+ \mathbb{E}[|g(X) - f(X)|]$$

$$\leq 2\varepsilon + \underbrace{|\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(X)]|}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ n \to \infty}} \text{ car } g \in H$$

∞

Corollaire Soit X_n, X v.a. à valeurs $\mathbb{Z}$. Alors

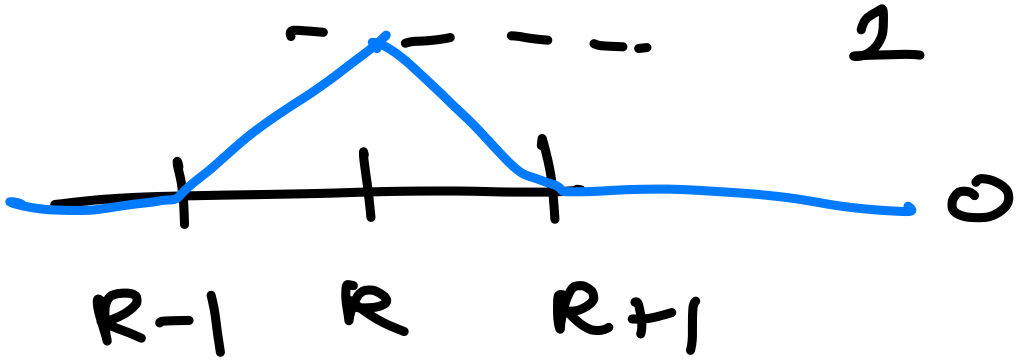
$X_n \xrightarrow{(d)} X$ ssi $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$P(X_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(X = k)$$

Preuve

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $k \in \mathbb{Z}$ et

f_k :



$f_k \in C_b(\mathbb{R})$. Donc

$$\begin{array}{ccc} E[f_k(X_n)] & \xrightarrow[n\to\infty]{} & E[f_k(X)] \\ \| & & \| \\ P(X_n = k) & & P(X = k) \end{array}$$

$$\left(\delta_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq k \\ 1 & \text{si } x = k \end{cases} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } Y = 0 \text{ ou } 1, \\ \mathbb{E}[Y] = \mathbb{P}(Y=1) \end{array} \right)$$

$\boxed{\Leftarrow}$ On montre que

$\forall f \in C_c(\mathbb{R}),\ \mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$

Soit K le support de f.

On remarque $\# K \cap \mathbb{Z} < \infty$ car K compact. On a donc

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \sum_{k \in \mathbb{Z} \cap K} f(k)\, \mathbb{P}(X_n = k)$$

somme finie

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k \in \mathbb{Z} \cap K} f(k)\, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}[f(X)]$$

Application Soit $\lambda > 0$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. avec $X_n \overset{d}{=} \mathrm{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})$

Alors $X_n \xrightarrow{(d)} \mathrm{Poi}(\lambda)$

interprétation $\mathrm{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})$ représente le nombre de succès dans un grand nombre d'essais $\underline{1)}$ ayant une faible probabilité de succès :

$\mathrm{Poi}(\lambda)$ modélise des "événements rares"

Preuve On montre que $\forall k \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\exp\left((n-k)\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right)}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} e^{-\lambda}}$$

(développement limité de $\ln(1-x)$)

D'où le résultat

2) Application : convergence des mesures empiriques

$(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. iid dans $\mathbb{R}^d$

Problème fondamental en statistique : retrouver la loi de X_1 à partir de la donnée de $X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots$ (un "échantillon") pour une seule valeur de ω.

Exemple Dans les sondages, on s'intéresse à la proportion de personnes dans la la population dont le "paramètre" est dans A, avec A variable.

Mathématiquement, il s'agit de savoir si la <u>mesure aléatoire</u>, dite mesure empirique,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{X_j(\omega)}$$

est proche de $\mathbb{P}_{X_1}$ pour n grand

Théorème Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. iid dans $\mathbb{R}^d$.
Pour $\omega \in \Omega$ et $n \geq 1$, on définie $\mu_{n,\omega}$ par

$$\mu_{n,\omega} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{X_j(\omega)},$$

mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$.

Alors p.s., $\mu_{n,\omega} \to \mathbb{P}_{X_1}$ étroitement.

c'est à dire :

p.s $\forall f \in C_b(\mathbb{R}^d)$, $\int f \, d\mu_{n,\omega} \to \int f \, d\mathbb{P}_{X_1}$

ou encore

p.s. $\forall f \in C_b(\mathbb{R}^d)$, $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(X_j) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[f(X_1)]$

Preuve Pour $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$,

p.s $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(X_j) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[f(X_1)]$

par LGN

⚠ ⚠ ⚠ $C_b(\mathbb{R}^d)$ n'est pas dénombrable : on ne peut pas échanger $\forall f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ et p.s.

idée : utiliser restriction fonctions tests.

Soit $H \subset \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ un ensemble dénombrable dense de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$

(exercice: vérifier que cela existe).

On a

$$\forall f \in H,\ p\text{-}s,\ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$$

H est dénombrable, donc

$$p\text{-}s\ \ \forall f \in H,\ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$$

Donc

$p\text{-}s$ $\mu_{n,\omega} \longrightarrow \mu$ étroitement

(par le théorème de *)

Dénombrabilité joue un rôle important en probabilités.

3) Fonctions caractéristiques

Elles sont très utiles pour étudier les lois et convergence en loi dans $\mathbb{R}^d$.

Ce sont des espérances de v.a. à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Si Z est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{C}$, lorsque $\mathbb{E}[|Z|] < \infty$ ($|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$)

on définit,

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[\operatorname{Re}(Z)] + i\,\mathbb{E}[\operatorname{Im}(Z)]$$

qui est bien définie car

$|\operatorname{Re}(Z)| \leq |Z|$

$|\operatorname{Im}(Z)| \leq |Z|$

donc $\mathrm{Re}(Z)$, $\mathrm{Im}(Z)$ sont des v.a. réelles intégrables

Définition de la fonction caractéristique d'une v.a. $X = (X_1, \dots, X_d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est la fonction

$$\varphi_X : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$$

définie par : $\forall u \in \mathbb{R}^d$

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{i\underbrace{\langle u, X\rangle}_{\text{produit scalaire}}}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{i(u_1 X_1 + \dots + u_d X_d)}\right]$$

Remarques

1) φ_X est bien définie car

$$\left|e^{i\langle u, x\rangle}\right| = 1$$

2) Par théorème de transfert,

$$\varphi_X(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle u, x\rangle} \, \mathbb{P}_X(dx)$$

est la transformée de Fourier de $\mathbb{P}_X$.

Exemple Soit $X = \mathcal{P}oi(\lambda)$.

Calculons φ_X :

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}]$$

$$= \sum_{k \geq 0} e^{iuk} \, e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda e^{iu})^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= \exp(\lambda e^{iu}) e^{-\lambda}$$

$$= e^{\lambda(e^{iu}-1)}$$

Proposition X v.a. dans $\mathbb{R}^d$

φ_X vérifie $\forall u \in \mathbb{R}^d$:

1. $\varphi_X(0) = 1$
2. $\varphi_X(-u) = \overline{\varphi_X(u)}$
3. $|\varphi_X(u)| \leq 1$
4. $|\varphi_X(u+h) - \varphi_X(u)| \leq \mathbb{E}[|e^{i\langle h, X\rangle} - 1|]$ $\forall h \in \mathbb{R}^d$

et donc φ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$

(en effet $\mathbb{E}\left[\left|e^{i\langle h, X\rangle} - 1\right|\right] \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ par convergence dominée.

Cela provient immédiatement de la définition de φ_X.

Un exemple TRÈS important est le calcul de la fonction caractéristique d'une v.a. $N(m, \sigma^2)$

Rappel • Si $X \sim N(m, \sigma^2)$, X a densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$

• Pour $a, b \in \mathbb{R}$,
$a + bX \overset{(d)}{=} N(a+m, \sigma^2 b^2)$

Théorème Si $X \sim N(m, \sigma^2)$

$$\varphi_X(u) = e^{imu - \frac{\sigma^2 u^2}{2}}$$

Preuve quitte à considérer $\frac{X-m}{\sigma}$, on peut supposer $m=0$ et $\sigma=1$: $X \sim N(0,1)$.
Comme $X \overset{(d)}{=} -X$, on a
$\forall u \in \mathbb{R}$ $\varphi_X(u) = \varphi_X(-u)$,

donc $\forall u \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(u) = \overline{\varphi_X(u)}$

donc $\varphi_X(u) \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$\varphi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cos(ux) e^{-x^2/2} dx$$

<u>idée</u> :

$$\varphi_X'(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -x \sin(ux) e^{-x^2/2} dx$$

on peut dériver sous $\int$

car $\left| -x \sin(ux) e^{-x^2/2} \right| \leq |x| e^{-x^2/2}$.

Par intégration par parties,

on obtient

$$\varphi_X'(u) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} u\cos(ux)\,dx$$

$$= -u\,\varphi_X(u).$$

Avec $\varphi_X(0) = 1$ on obtient

$$\varphi_X(u) = e^{-u^2/2}.$$

4) Fonctions caractéristiques et lois

Lemme On suppose X à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Alors φ_X est C^2 et

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{iXt}] = 1 + i\,\mathbb{E}[X]\,t \; -$$

$\frac{1}{2}\mathbb{E}[X^2]\,t^2 + o(t^2)$

<u>Preuve</u> : montrons que φ_X est deux fois dérivable.
On utilise un résultat général d'interversion dérivation et intégration :
si : • $\forall t \in \mathbb{R}$, $F(t, X) \in L^1$
• p.s $t \mapsto F(t, X)$ est dérivable
• $\exists Y \in L^1$ tq $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} F(t, X) \right| \leq Y$$

alors $t \mapsto \mathbb{E}[F(t, X)]$ est dérivable de dérivée

$\mathbb{E}\left[\frac{d}{dt} F(t,X)\right]$.

Ici $F(t,X) = e^{itX}$.

On l'applique deux fois :

$\left|\frac{d}{dt} F(t,x)\right| \leq |X|$

$\left|\frac{d^2}{dt^2} F(t,x)\right| \leq X^2$.

Ainsi $\varphi_X'(t) = i\mathbb{E}[X e^{iXt}]$

$\varphi_X''(t) = -\mathbb{E}[X^2 e^{iXt}]$

φ_X'' est continue par convergence dominée,

$\varphi_X'(0) = i\,\mathbb{E}[X]$, $\varphi_X''(0) = -\mathbb{E}[X^2]$

Le résultat s'ensuit par formule de Taylor

Remarque : le même raisonnement montre plus généralement que si $X=(X_1,\dots,X_d)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de carré intégrable alors $\varphi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est C^2 et

$$\varphi_X(u) = 1 + i\sum_{j=1}^{d} u_j\, \mathbb{E}[X_j] - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} u_k u_j\, \mathbb{E}[X_j X_k] + o(\|u\|^2)$$

avec $u = (u_1, \dots, u_d)$

- Lorsque $X \in L^p$ on peut calculer $\varphi_X^{(p)}(0)$ pour avoir accès à $\mathbb{E}[X^p]$

~

Théorème Soient X, Y v.a. dans $\mathbb{R}^d$. Alors

$\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ ($X \overset{(d)}{=} Y$)

ssi

$\varphi_X = \varphi_Y$ (i.e. $\forall u \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_X(u) = \varphi_Y(u)$)

Preuve : on la fait dans $d=1$ pour simplifier les notations.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $X \overset{(d)}{=} Y$.
On sait que $\forall$ g avec $g(X)$ ou $g(Y) \in L^1$, $\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[g(Y)]$
Donc $\forall u \in \mathbb{R}$,

$$\underbrace{\mathbb{E}[e^{iuX}]}_{\varphi_X(u)} = \underbrace{\mathbb{E}[e^{iuY}]}_{\varphi_Y(u)}.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $\varphi_X = \varphi_Y$
On montre $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.
C'est la partie difficile.
<u>Idée</u> ajouter une petite perturbation gaussienne
Soit $Z_n \overset{(d)}{=} \mathcal{N}(0, \frac{1}{n^2})$ $\perp\!\!\!\perp X$, $\perp\!\!\!\perp Y$

On peut supposer $X, Y, (Z_n)_{n\geq 1}$ définis sur le même espace de probabilité

Idée : Montrer que $\forall n \geq 1$,

$$X + Z_n \overset{(d)}{=} Y + Z_n. \quad (*)$$

En effet, si $(*)$ est vrai, alors $Z_n \xrightarrow{L^2} 0$ car $\mathbb{E}[Z_n^2] = \frac{1}{n^2} \to 0$, donc

$$X + Z_n \xrightarrow{L^2} X$$

Donc $X + Z_n \xrightarrow{(d)} X$

De même $Y + Z_n \xrightarrow{(d)} Y$

Donc $X \overset{(d)}{=} Y$ par $(*)$.

Montrons $X + Z_n \overset{(d)}{=} Y + Z_n$. (✱)

Idée On prend $F \geq 0$ mesurable et on montre que $\mathbb{E}[F(X+Z_n)]$ ne dépend que de φ_X

Soit $g_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$

densité de $N(0,\sigma^2)$. D'après le calcul de sa fonction caractéristique, on a :

$$g_\sigma(z) \overset{(✱)}{=} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iuz} g_{1/\sigma}(u)\,du$$

$\forall z \in \mathbb{R}$

Alors :

$\mathbb{E}[F(X + Z_n)]$

$$= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} g_{1/n}(z)\,dz\, F(X+z)\right]$$

car Z_n a pour densité $g_{1/n}$

$$= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} g_{1/n}(z-X)\, F(z)\,dz\right]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dz\, F(z)\, \mathbb{E}[g_{1/n}(z-X)]$$

(Fubini)

Mais

$$g_{1/n}(z-X) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iu(z-x)} g_n(u)\,du$$

par (*)

Donc par Fubini-Lebesgue :

$\mathbb{E}[g_{1/n}(z-X)]$

$$= \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iuz} g_n(u)\, \mathbb{E}[e^{-iuX}]\, du$$

<u>Conclusion</u>

$$\mathbb{E}[F(X+Z_n)]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dz\, F(z) \left(\frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iuz} g_n(u)\, \varphi_X(-u)\, du \right)$$

On a la même formule avec $\mathbb{E}[F(Y+Z_n)]$.

Comme $\varphi_X(-u) = \varphi_Y(-u)$ $\forall u \in \mathbb{R}$, on conclut que

$$\mathbb{E}[F(X+Z_n)] = \mathbb{E}[F(Y+Z_n)]$$

Donc $X + Z_n \overset{(\mathcal{L})}{=} Y + Z_n$

preuve assez délicate, le plus important est le résultat :

$$P_X = P_Y \iff \varphi_X = \varphi_Y$$

Corollaire important

$X_1, \dots, X_k$ v.a dans $\mathbb{R}$. Elles sont $\perp\!\!\!\perp$ $\iff$ $\forall u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[e^{iu_1X_1} \cdots e^{iu_kX_k}] = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{E}[e^{iu_jX_j}] \quad (*)$$

$$\iff \varphi_{(X_1,\dots,X_k)}(u_1,\dots,u_k)$$

$$= \varphi_{X_1}(u_1) \cdots \varphi_{X_k}(u_k)$$

Preuve

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $X_1, \dots, X_k$ sont $\perp\!\!\!\perp$, on sait que

$$\mathbb{E}[f_1(X_1) \cdots f_k(X_k)] = \mathbb{E}[f_1(X_1)] \cdots \mathbb{E}[f_k(X_k)]$$

quand $f_1(X_1), \dots, f_k(X_k)$ sont intégrables.

On l'applique ici avec

$$f_j(x) = e^{i u_j x}.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $(\forall)$ est vrai, alors le v.a. $(X_1, \dots, X_k)$ a la même fonction caractéristique qu'une v.a. de loi: $\mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_\ell}$

Par le théorème on a

$$\mathbb{P}_{(X_1, \ldots, X_\ell)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_\ell}$$

Donc $X_1, \ldots, X_\ell$ sont $\perp\!\!\!\perp$.

Applications importantes

① $X \overset{(d)}{=} N(m_1, \sigma_1^2)$

$Y \overset{(d)}{=} N(m_2, \sigma_2^2)$

On suppose $X \perp\!\!\!\perp Y$. Alors

$$X+Y \overset{(d)}{=} N(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

(2) On suppose $U_r \overset{(d)}{=} Poi(r)$ $U_s \overset{(d)}{=} Poi(s)$ avec $U_r \perp\!\!\!\perp U_s$

Alors $U_r + U_s \overset{(d)}{=} Poi(r+s)$

Ainsi, une somme de v.a $\perp\!\!\!\perp$ gaussiennes est gaussienne, une somme de v.a. $\perp\!\!\!\perp$ Poisson est Poisson

(⚠ ⚠ Faux si pas $\perp\!\!\!\perp$

par exemple si $X = N(0,1)$ $Y = -X$, alors

$X + Y = 0 \overset{(d)}{\neq} N(0,2)$)

Ceci provient du corollaire

et des formules explicites

- $\mathbb{E}[e^{itN(m,\sigma^2)}]$
$$= e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

- $\mathbb{E}[e^{it\,Poi(r)}] = e^{r(e^{it}-1)}$

(par exemple :

$$\mathbb{E}[e^{iu(U_r + U_s)}]$$
$$= \mathbb{E}[e^{iuU_r}]\,\mathbb{E}[e^{iuU_s}]$$
$$= e^{r(e^{iu}-1)}\, e^{s(e^{iu}-1)}$$
$$= e^{(r+s)(e^{iu}-1)}$$
$$= \mathbb{E}[e^{iu\,Poi(r+s)}])$$

Remarque Quand X est une v.a à valeurs dans $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ on utilise souvent sa <u>fonction génératrice</u> qui est par définition la série entière

$$g_X(z) = \sum_{n\geq 0}^{\infty} P(X=n)\, z^n$$

de rayon de convergence ≥ 1, de sorte que

$$g_X(e^{i\theta}) = \varphi_X(\theta).$$

On peut montrer que

si X, Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, $X \overset{(d)}{=} Y$ ssi $g_X = g_Y$