

Cours 16 : Exemples

- Plan:
- 1) Quelques modèles
 - 2) Liens entre probabilités et équations différentielles

Ce dernier cours est moins formel, son but est de donner du contexte pour illustrer en quoi ce qu'on a vu en cours s'inscrit dans un cadre plus large.

1) Quelques modèles

a) En mécanique

L'évolution d'un ensemble de points matériels de position x est régie par la loi de Newton:

$$m \ddot{x} = F(x, \dot{x})$$

$\dot{x}$ représente la vitesse

$\ddot{x}$ représente l'accélération

m — la masse (supposée constante)

$F(x, \dot{x})$ — la force qui s'exerce, qui dépend de la position et de la vitesse

On a vu qu'on peut se ramener à une équation différentielle d'ordre 1 d'inconnue (x):

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = \frac{1}{m} F(x, v)$$

Quelques exemples de forces:

- pour un pendule avec une masse  m : $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (cercle),

$$F(x, v) = -m \frac{g}{\ell} \sin(x) - k v$$

avec g accélération de la pesanteur, ℓ longueur du fil, $k \geq 0$ coefficient de frottement visqueux

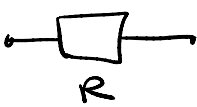
La force peut dériver d'un potentiel: $F(x) = -\nabla V(x)$. Dans ce cas, on a un système Hamiltonien: en posant $(q, p) = (x, mv)$ et $H(q, p) = \frac{1}{2} m \|v\|^2 + V(q)$, le système se résout

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \end{cases}$$

C'est un système qui apparaît très souvent

2) En électronique

En notant I le courant qui passe dans un conducteur et U la tension entre deux nœuds, on a les lois

Résistance:  $U = RI$ (Ohm)

Bobine:  $U = L \frac{dI}{dt}$ (Faraday)

Condensateur:  $I = C \frac{dU}{dt}$ (Capacité)

ce qui amène à des équations différentielles

3) Dynamique des populations

Les équations différentielles ordinaires sont très utilisées pour modéliser l'évolution d'une population. Un exemple est donné par les équations de Lotka-Volterra, un modèle de type proie-prédateurs:

$$\begin{cases} N'(t) = N(t) (a - b P(t)) \\ P'(t) = P(t) (c N(t) - d) \end{cases}$$

où :

- $P(t)$ représente la fraction de prédateurs
- $N(t)$ ————— proies
- $a > 0$ ————— taux de naissance pour les proies
- $b > 0$ ————— de prédation
- $c > 0$ ————— de reproduction des prédateurs
- $d > 0$ ————— de mortalité des prédateurs.

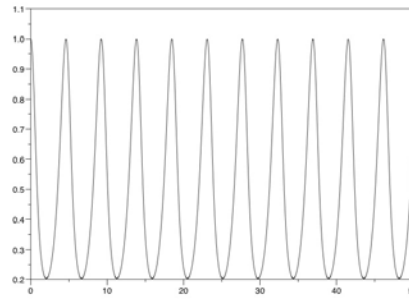
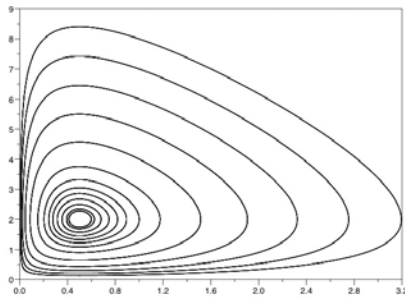


FIG. 1 – Solutions des équations de Lotka-Volterra. A gauche, quelques trajectoires $(N(t), P(t))_{t \geq 0}$ pour diverses conditions initiales (en abscisse N , et en ordonnée P). A droite, Une trajectoire $t \mapsto N(t)$ (en abscisse t , et en ordonnée N). Paramètres : $a = 2, b = 1, c = 2, d = 1$.

On observe que les solutions semblent périodiques, restent ≥ 0 .

Un autre modèle est le modèle SIR, régi par :

$$S'(t) = -\beta S(t) I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t) I(t) - \gamma I(t)$$

$$R'(t) = \gamma I(t)$$

avec $\beta > 0, \gamma > 0$:

Interprétation:

$S(t)$	représente la fraction d'individus sains à l'instant t
$I(t)$	malades
$R(t)$	guéris

- β représente le taux des infections entre malades et guéris
- γ le taux des guérisons.

4) Cinétique chimique

Considérons une réaction chimique sur trois espèces : $Y_3 \xrightarrow{k_3} Y_2 \xrightarrow{k_2} Y_1 \xrightarrow{k_1} Y_0$
L'évolution de la concentration (Y_1, Y_2, Y_3) des 3 espèces vérifie:

$$\begin{cases} Y_1'(t) = -k_1 Y_1(t) + k_2 Y_2(t) \\ Y_2'(t) = k_1 Y_1(t) - k_2 Y_2(t) + k_3 Y_3(t) \\ Y_3'(t) = -k_3 Y_3(t) \end{cases}$$

Dans ce genre de problème on observe typiquement de grandes disparités dans les coefficients k_i . Il y a donc des échelles de temps très différentes: il faut en tenir compte pour discrétiser les équations de manière efficace.

5) Météorologie

Lorenz a proposé un modèle atmosphérique très simplifié qui possède "une forte sensibilité aux conditions initiales":

$$\begin{cases} x'(t) = \sigma(y(t) - x(t)) \\ y'(t) = \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ z'(t) = x(t)y(t) - bz(t) \end{cases}$$

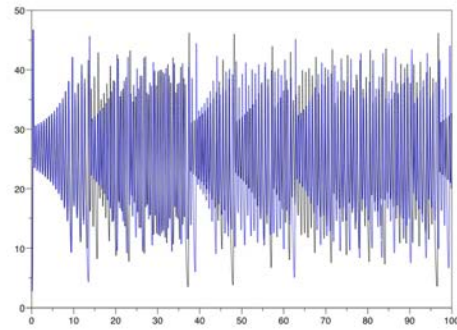
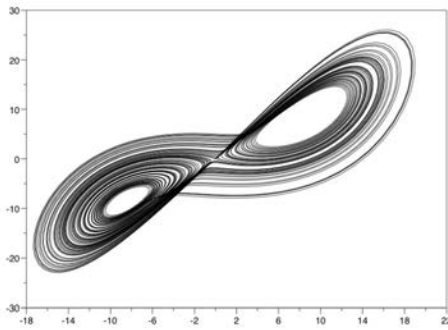


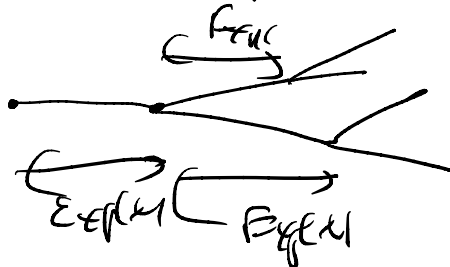
FIG. 2 – Solutions des équations de Lorenz. A gauche, une trajectoire typique $(x(t), y(t))_{t \geq 0}$ (en abscisse x , et en ordonnée y). A droite, Deux trajectoires $t \mapsto z(t)$ pour deux conditions initiales très proches mais différentes $((x, y, z)(0) = (1, 2, 3)$ et $(x, y, z)(0) = (1.01, 2, 3))$ (en abscisse t , et en ordonnée z). Paramètres : $\sigma = 10$, $r = 28$ et $b = 8/3$.

On observe que les trajectoires divergent très vite par deux conditions initiales très proches.

2) Probabilités et équations différentielles

a) Processus de Yule

Soit $\lambda > 0$. On considère un individu qui donne naissance à un nouvel individu aux temps $E, E_1 + E_2, \dots$ où $(E_i)_{i \geq 1}$ sont iid $\text{Exp}(\lambda)$. Les nouveaux individus font de même.



On note T_n le n ième temps de naissance avec $T_0 = 0$. On admet que $(T_n - T_{n-1})_{n \geq 1}$ sont iid avec $T_n - T_{n-1} \stackrel{\text{loi}}{=} \text{Exp}(\lambda n)$ (ici provient de la propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle et du fait que si $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Y \sim \text{Exp}(\mu)$ et $X \neq Y$, alors $\min(X, Y) \sim \text{Exp}(\lambda + \mu)$).

Alors, en notant $X(t)$ le nombre d'individus présents à l'instant t on a $P(X(t)=n) = e^{-\lambda t} (1-e^{-\lambda t})^n$ (4)

En effet, notons $P_n(t) = P(X(t)=n)$

$$\begin{aligned} \text{On a } P(X(t+h)-X(t)=0 \mid X(t)=n) &= P(\text{Exp}(\lambda n) > h) \\ &= e^{-\lambda n h} = 1 - \lambda n h + o(h) \end{aligned}$$

On vérifie de même que

$$P(X(t+h)-X(t)=1 \mid X(t)=n) = \lambda n h + o(h)$$

$$P(X(t+h)-X(t) \geq 2 \mid X(t)=n) = o(h)$$

Alors

$$P_n(t+h) = P(X(t+h)=n)$$

$$= P(X(t+h)=n \mid X(t)=n) \times P_n(t) + P(X(t+h)=n \mid X(t)=n-1) \times P_{n-1}(t)$$

$$+ P(X(t+h)=n \mid X(t) < n-1) \times P(X(t) < n-1)$$

$$= (1 - \lambda n h + o(h)) P_n(t) + (\lambda h(n-1) + o(h)) P_{n-1}(t) + o(h) P(X(t) < n-1)$$

En retranchant $P_n(t)$, en divisant par h et en faisant $h \rightarrow 0$ on obtient

$$\frac{d}{dt} P_n(t) = (n-1)\lambda P_{n-1}(t) - n\lambda P_n(t)$$

Le système d'équations différentielles se résout et on obtient (4)

b) Chaînes de Markov

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, soit $(p_{ij})_{j \in \mathbb{Z}}$ une mesure de probabilité sur $\mathbb{Z}$ avec $p_{ij} > 0 \forall i, j \in \mathbb{Z}$

On considère une marche aléatoire partant de 0 telle que si on est en i , on saute en j avec probabilité p_{ij} . Formellement, $(S_n)_{n \geq 0}$ est une suite de v.e. t.q.:

$$(1) S_0 = 0$$

$$(2) \forall n \geq 0 \quad \mathbb{P}(S_{n+1} = i_{n+1} \mid S_n = i_n, \dots, S_1 = i_1) = P_{i_n, i_{n+1}} \quad \forall i_1, \dots, i_{n+1} \in \mathbb{Z}.$$

C'est un cas particulier de chaîne de Markov

Alors p.s. $(S_n)_{n \geq 0}$ passe une fraction positive de temps en 0

$$\Leftrightarrow \exists V: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+, \exists F \subset \mathbb{Z} \text{ fini}, \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } \forall i \in \mathbb{Z}$$

$$(1) \sum_{j \in \mathbb{Z}} p_{ij} V(j) < \infty \quad \text{pour } i \in F$$

$$(2) \sum_{j \in \mathbb{Z}} p_{ij} V(j) \leq V(i) - \varepsilon \quad \text{pour } i \notin F$$

Il s'agit d'un analogue probabiliste de stabilité (théorème de Foster - Lyapounov)

Intuitivement, la marche est "poussée" vers F .

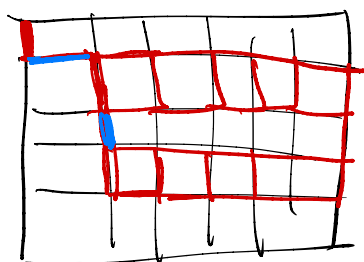
c) Percolation

Soit $p \in [0, 1]$. Dans $\mathbb{Z}^2$, on garde chaque arête avec probabilité p et on l'enlève sinon (on le fait indépendamment pour les arêtes). C'est un modèle de percolation. On se pose la question de l'influence du paramètre p (existence de chemins infinis, etc.).

On se place sur $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ (0: arête absente, 1: arête présente)
On dit que AC Ω est croissant s'il reste réalisé si on ajoute des arêtes

(par exemple $A = \{ \} \}$ composé comme une infinité $\{ \}$)

On dit qu'une arête e est pivotale pour A si sans e , A n'est pas réalisé et avec e A est réalisé



2 arêtes pivotales
pour A

$A = \{ \text{aller de gauche à droite} \}$

Théorème (Formule de Russo)

Soit A un événement croissant qui ne dépend que d'un nombre fini d'arêtes. Alors

$$\frac{d}{dp} P_p(A) = \mathbb{E}_p[\text{nombre d'arêtes pivotales pour } A]$$

Ce résultat a été intensément utilisé par Hugo Duminil-Copin et coauteurs dans l'étude de la percolation

d) Modèle SIR Stochastique

On considère le modèle suivant à l'instant $t=0$, on a

$$S_0^n = n \quad (n \text{ individus sains})$$

$$I_0^n = 1 \quad (1 \text{ individu malade})$$

$$R_0^n = 0 \quad (0 \text{ individu sain})$$

Soit $\lambda > 0$

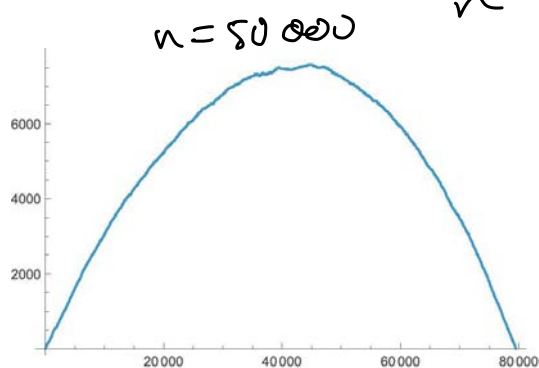
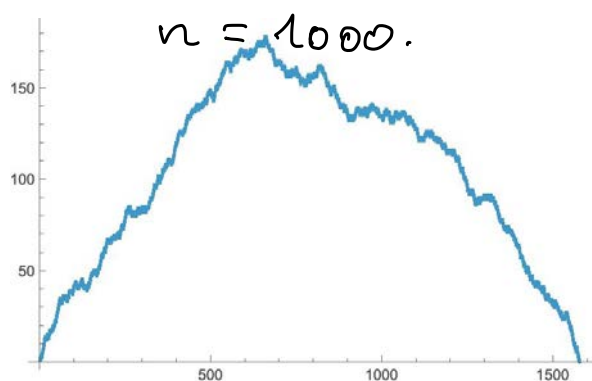
Puis

$$(S_{k+1}^n, I_{k+1}^n, R_{k+1}^n) = \begin{cases} (S_k^n - 1, I_k^n + 1, R_k^n) \\ \text{avec proba proportionnelle à } \frac{\lambda}{n} S_k^n I_k^n \\ \text{proba} = \frac{\frac{\lambda}{n} S_k^n}{1 + \frac{\lambda}{n} S_k^n} \\ (S_k^n, I_k^n - 1, R_{k+1}^n) \\ \text{à } I_k^n \text{ avec proba proportionnelle} \\ \text{proba} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{n} S_k^n} \end{cases}$$

Interprétation : infection entre 2 individus malade et individu sain à
temps $\frac{1}{n}$

• question d'un individu malade à temps.

Simulations : évolution de $(I_k^n : k \geq 1)$ pour $\lambda = \frac{2}{n}$



On peut montrer que :

- ⊗ Lorsque $\lambda \leq 1$, le temps d'extinction converge en loi lorsque $n \rightarrow \infty$
- ⊙ Lorsque $\lambda > 1$, avec probabilité 10 l'épidémie ne s'éteint pas en temps fini, et alors $(\frac{S_{nt}^n}{n} : t \geq 0)$ "converge" vers $(g(t) : t \geq 0)$

où g est la solution de
$$\begin{cases} g'(t) = -\frac{\lambda g(t)}{1 + \lambda g(t)} \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

C'est la notion de limite fluide.