

Cours 14: Flot, stabilité

- Plan:
- 1) Application du flot
 - 2) Équilibres et stabilité
 - 3) Stabilité par linéarisation

1) Application du flot

On considère l'équation $x'(t) = f(x(t))$ avec $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 .
On rappelle qu'on note $t \mapsto \phi_t(x_0)$ la solution maximale avec $x(0) = x_0$ et I_{x_0} son intervalle de définition.

Posons $\mathcal{D} = \{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X} : t \in I_x \}$
le domaine de définition de $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$

Rappel:

Théorème (flot)

- ① $\mathcal{D}$ est ouvert
- ② $\phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1
 $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$
- ③ On note $D_x \phi_t(x)$ la différentielle de $\phi_t(x)$ par rapport à x au point x , matrice de $M_n(\mathbb{R})$, et $D_x f$ la différentielle de $x \mapsto f(x)$ au point x vue comme matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

$$\forall (t, x) \in \mathcal{D} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} D_x \phi_t(x) = D_{\phi_t(x)} f \circ D_x \phi_t(x) \\ D_x \phi_0(x) = \text{id} \quad (\phi_0(x) = x) \end{cases}$$

Remarque: Le théorème peut être appliqué à des équations différentielles à paramètres. Par exemple si $x'(t) = f_\lambda(x(t))$ avec $f_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \subset \mathbb{I}$.
 On pose $f(x, \lambda) = f_\lambda(x)$ et On suppose que $(x, \lambda) \mapsto f(x, \lambda)$ est C^1 .
 Alors $x'(t) = f_\lambda(x(t))$ se réécrit $\begin{cases} x'(t) = f(x(t), \lambda) \\ \lambda'(t) = 0 \end{cases}$
 qui se réécrit $X'(t) = F(X(t))$
 avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix}$ $F(x, \lambda) = \begin{pmatrix} f(x, \lambda) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Application Pour un champ de vecteurs $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \subset \mathbb{I}$, en notant $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$, la divergence de g est définie par
 $\operatorname{div} g(x) = \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(x) = \operatorname{tr}(D_x g)$

Soit ϕ le flot associé à $x'(t) = g(x(t))$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ mesurable tel que ϕ_t soit défini sur A .

On suppose $\operatorname{div} g = 0$.

alors $\operatorname{Vol}(A) = \operatorname{Vol}(\phi_t(A))$

Preuve: Par changement de variable

$$\operatorname{Vol}(\phi_t(A)) = \int_{\phi_t(A)} dx = \int_A |\det D_x \phi_t(x)| dx$$

$$\text{Or } \frac{d}{dt} D_x \phi_t(x) = \underbrace{D_{\phi_t(x)} g}_{\text{de trace nulle}} : D_x \phi_t(x)$$

On en déduit que $t \mapsto \det D_x \phi_t(x)$ est constant.
 en $t=0$ il vaut 1.



2) Équilibre et stabilité

On pose l'équation $x'(t) = f(x(t))$ avec $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 .

Definition Un point $x_0 \in \mathcal{D}$ est un équilibre de $x'(t) = f(x(t))$ si la fonction constante $x(t) = x_0$ est solution, ce qui est équivalent à $f(x_0) = 0$.

Donc, l'orbite de x_0 est $\{x_0\}$. D'un point de vue physique, cela correspond à un "état d'équilibre": si un objet y est, il y reste.

Definition Un équilibre x_0 est stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \| \phi_t(x) - x_0 \| < \varepsilon$
pour $t \in \mathbb{I}_x \cap \mathbb{R}_+$.

Remarque En choisissant $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, \varepsilon) \subset \mathcal{D}$, on voit que $\phi_t(x) \in \overline{B}(x_0, \varepsilon)$ compact $\forall t \in \mathbb{I}_x \cap \mathbb{R}_+$. D'après le théorème de continuité définie de tout compact, cela implique $\mathbb{I}_x \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+$: $\phi_t(x)$ est défini pour tout $t \geq 0$.

Definition • Un équilibre x_0 est (localement) asymptotiquement stable si il est stable et $\exists V \subset \mathcal{D}$ voisinage de x_0 tel que $\forall x \in V, \phi_t(x) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} x_0$
• Si $V = \mathcal{D}$, on dit que x est globalement asymptotiquement stable.

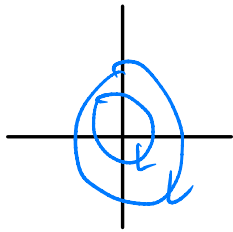
Ainsi, dans le premier cas, toute solution partant de l'équilibre en reste proche et de plus converge vers lui.

Dans le cas linéaire, utilisation de la réduction de Jordan et l'étude des solutions qui en a suivi permet de montrer:

Proposition Considération d'équation $x'(t) = Ax(t)$ avec $A \in M_n(\mathbb{R})$.

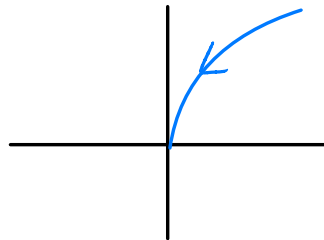
- 0 est un point d'équilibre stable ssi $\forall \lambda \in \text{Sp}(A) = \{ \text{valeurs propres de } A \}$, $\text{Re}(\lambda) \leq 0$, et si $\text{Re} \lambda = 0$, les multiplicités algébriques et géométriques sont égales
- 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable ssi $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$ on a $\text{Re}(\lambda) < 0$

Exemples (portant de plus)



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

0 stable mais non asymptotiquement stable



$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

0 asymptotiquement stable

3) Stabilité par linéarisation

On revient à l'équation $x'(t) = f(x(t))$ avec $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 .
Si x_0 est un équilibre, nous allons voir que l'étude des valeurs propres de $Df(x_0)$ permet de caractériser la stabilité de l'équilibre.

Théorème (stabilité de Lyapounov)

Si $\forall \lambda \in \text{Sp}(Df(x_0))$ on a $\text{Re}(\lambda) < 0$, alors x_0 est asymptotiquement stable.

Remarque la condition est suffisante mais pas nécessaire. Par exemple, $y'(t) = -y^2(t)$, on a $Df(0) = 0$, mais la solution avec $y(0) = y_0$ est $y(t) = \frac{\text{signe}(y_0)}{\sqrt{2t + 1/y_0}}$ $t \geq 0$, qui converge vers 0 quand $t \rightarrow \infty$.

Preuve: Quitte à faire une translation on peut supposer $x_0 = 0$

Posez $A = Df(0)$

Soit $\sigma > 0$ tel que $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$, $\text{Re}(\lambda) < -\sigma$. La forme de $\exp(tA)$ obtenue par réduction de Jordan montre que $e^{tA} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$. Soit donc $c > 0$ tel que $\|e^{tA}\| \leq c e^{-\sigma t}$ $\forall t \geq 0$.

Écrivons $x'(t) = A x(t) + \underbrace{(f(x(t)) - A x(t))}_{g(x(t))}$ avec $\|g(x)\| = o(\|x\|)$

D'après la formule de Duhamel,

$$x(t) = e^{tA} x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} g(x(s)) ds$$

Soit $\varepsilon < \frac{\sigma}{2c}$ et $\delta > 0$ tel que $\|g(x)\| \leq \varepsilon \|x\|$ pour $\|x\| < \delta$.

Vérifions que $\|x(0)\| < \frac{\delta}{2c} \Rightarrow \forall t \geq 0 \quad \|x(t)\| \leq \delta$.

Par l'absurde, soit $t_0 = \inf\{t > 0 : \|x(t)\| > \delta\}$. Alors par continuité $\|x(t_0)\| = \delta$, mais

$$\begin{aligned} \|x(t_0)\| &\leq \|e^{t_0 A}\| \|x(0)\| + \int_0^{t_0} \|e^{(t_0-s)A}\| \|g(x(s))\| ds \\ &\leq c e^{-\sigma t_0} \|x(0)\| + \int_0^{t_0} c e^{-(t_0-s)\sigma} \varepsilon \|x(s)\| ds \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \|x(t_0)\| < \frac{\delta}{2} + \underbrace{\varepsilon \delta \int_0^{t_0} e^{-(t_0-s)\sigma} ds}_{1/\sigma} < \delta$$

Absurde.

Prenons ainsi $\|x(0)\| < \frac{\delta}{2C}$. Alors $\forall t \geq 0$, $\|x(t)\| < \delta$, donc $\|g(x(t))\| \leq \varepsilon \|x(t)\|$.

On en déduit qu'en notant $y(t) = \|x(t)\| e^{ct}$ on a donc par formule de Duhamel

$$y(t) \leq C\|x(0)\| + C\varepsilon \int_0^t y(s) ds$$

On utilise alors la version suivante du lemme de Gronwall vue précédemment

Lemme de Gronwall On suppose $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue, $c, c' > 0$ et $y(t) \leq c + c' \int_a^t y(s) ds$ pour $t \in [a, b]$
Alors $y(t) \leq c \exp(c'(t-a))$

Ainsi, $y(t) \leq C\|x(0)\| \exp(CEt)$

Ainsi, $\forall t \geq 0$, $\|x(t)\| \leq C\|x(0)\| e^{CEt} e^{-ct} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ car $E < \frac{\sigma}{2C} < \frac{\sigma}{C}$.

Théorème (instabilité de Lyapounov) On suppose $g(x_0) = 0$, $x'(t) = g(x(t))$ avec $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{C^1}$ et $\exists \lambda \in \text{Sp}(D_{x_0}g)$ avec $\text{Re}(\lambda) > 0$. Alors 0 n'est pas stable.

Preuve. Comme avant, on peut supposer $x_0 = 0$.

Soit $A = D_0g$ et $\sigma = \inf \{ \text{Re}(\lambda) : \lambda \in \text{Sp}(A), \text{Re}(\lambda) > 0 \} > 0$.

Étape 1: transformer A en matrice plus simple

Par réduction de Jordan dans $\mathbb{C}$ on peut écrire $B = P^{-1}AP$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ avec $B_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ blocs de Jordan correspondant à $\lambda \in \text{Sp}(A)$

avec $\text{Re}(\lambda) > 0$ et $B_2 \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ blocs de Jordan correspondant à $\lambda \in \text{Sp}(A)$ avec $\text{Re}(\lambda) \leq 0$.

Quitte à faire un changement de base, on peut supposer que les coefficients au dessus de la diagonale valent 0.

(par exemple si $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, elle devient $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1, y_{e_2}, \dots, y^{n-1} e_n)$).

On suppose $\eta < \frac{\sigma}{2}$. Soit $\varepsilon < \frac{\sigma}{2}$.

On écrit $x'(t) = A x(t) + g(x(t))$ avec $g(x) = g(x) - Ax$.

En posant $y(t) = P^{-1} x(t) \in \mathbb{C}^n$ on obtient

$$y'(t) = B y(t) + h(y(t)) \quad \text{avec } h(y) = P^{-1} g(P y) \quad (\forall)$$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on pose $N(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^p |x_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=p+1}^n |x_i|^2}$

Comme $g \in C^1$ et $h(0) = 0$, soit $\delta_0 > 0$ tel que $\|h(x)\|_2 \leq \varepsilon N(x)$ pour $\|x\| \leq \delta_0$.

Étape 2 On raisonne par l'absurde en supposant 0 stable. Soit $\delta > 0$ tel que

$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \forall t \geq 0, \|y(t)\| < \delta_0$. On choisit $x(0) = (0, 0, \dots, 0)$.

On écrit $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ et $h(y(t)) = \begin{pmatrix} h_1(y(t)) \\ h_2(y(t)) \end{pmatrix}$ de sorte que $(\forall)$ devient

$$\begin{cases} y_1'(t) = B_1 y_1(t) + h_1(y(t)) \\ y_2'(t) = B_2 y_2(t) + h_2(y(t)). \end{cases} \quad \text{avec } B_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \eta_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \eta_{p-1} & \\ & & & \lambda_p \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & \eta'_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \eta'_{q-1} & \\ & & & \lambda'_q \end{pmatrix}$$

où $\operatorname{Re}(\lambda_i) \geq \sigma$ et $\eta_i = 0$ ou η , où $\operatorname{Re}(\lambda'_i) \leq 0$ et $\eta'_i = 0$ ou η

L'idée est de considérer $R_1(t) = \|y_1(t)\|_2$ et $R_2(t) = \|y_2(t)\|_2$

• On a $R_1(t)^2 = \langle y_1(t), y_1(t) \rangle$ donc $\frac{d}{dt} R_1(t)^2 = \left\langle \frac{d}{dt} y_1(t), y_1(t) \right\rangle + \left\langle y_1(t), \frac{d}{dt} y_1(t) \right\rangle = 2 \operatorname{Re} \left\langle \frac{d}{dt} y_1(t), y_1(t) \right\rangle$

$$\text{Et } \left\langle \frac{d}{dt} y_1(t), y_1(t) \right\rangle = \underbrace{\langle B_1 y_1(t), y_1(t) \rangle}_{1^{\text{er}} \text{ terme}} + \underbrace{\langle h_1(y(t)), y_1(t) \rangle}_{2^{\text{e}} \text{ terme}}$$

$$\operatorname{Re}(1^{\text{er}} \text{ terme}) = \underbrace{\sum_{i=1}^p \operatorname{Re}(\lambda_i) |y_{2(i)}|_i^2}_{\geq \sigma R_1(t)^2} + \underbrace{\operatorname{Re} \left(\sum_{i=2}^p \eta_i (y_1(t))_{i-1} \overline{(y_2(t))_i} \right)}_{\text{en module } \leq \eta \sqrt{\sum_{i=2}^p |(y_2(t))_{i-1}|^2} \sqrt{\sum_{i=2}^p |(y_2(t))_i|^2} \text{ (Cauchy-Schwarz)}} \leq \eta R_1(t)^2$$

$$\begin{aligned} |2^{\text{e}} \text{ terme}| &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|h_1(y(t))\|_2 R_1(t) \\ &\leq \varepsilon (R_1(t) + R_2(t)) R_1(t). \end{aligned}$$

En utilisant $\operatorname{Re}(z) \geq -|z|$ pour $z \in \mathbb{C}$, on obtient

$$2 R_1(t) \frac{d}{dt} R_1(t) \geq (2\sigma R_1(t)^2 - \eta R_1(t)^2 - \varepsilon (R_1(t) + R_2(t)) R_1(t))$$

$$\text{Ainsi } R_1'(t) \geq (\sigma - \eta - \varepsilon) R_1(t) - \varepsilon R_2(t)$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ De même, } \frac{d}{dt} R_2(t)^2 &= 2 \operatorname{Re} \left(\langle B_2 y_2(t), y_2(t) \rangle + \langle h_2(y(t)), y_2(t) \rangle \right) \\ &= 2 \left(\underbrace{\sum_{i=1}^q \operatorname{Re}(\lambda_i) |y_{2i}(t)|^2}_{\leq 0} + \underbrace{\operatorname{Re} \left(\sum_{i=2}^q \eta_i y_{2i}(t) \overline{y_{2i}(t)} \right)}_{\leq \eta R_2(t)^2} + \underbrace{\operatorname{Re}(\chi_2(y(t), y_2(t)))}_{\leq \varepsilon (R_1(t) + R_2(t)) R_2(t)} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } R_2'(t) \leq (\eta + \varepsilon) R_2(t) + \varepsilon R_1(t).$$

Donc en notant $R(t) = R_1(t) - R_2(t)$,

$$\begin{aligned} R'(t) = R_1'(t) - R_2'(t) &\geq (\sigma - \eta - 2\varepsilon) R_1(t) - (\eta + 2\varepsilon) R_2(t) \\ &\geq \frac{\sigma}{2} R(t) \quad \text{car } \eta < \frac{\sigma}{2} \text{ et } \varepsilon < \frac{\sigma}{8} \end{aligned}$$

Il en découle que $R(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} +\infty$, absurde car $\|y(t)\| \leq d_0 \quad \forall t \geq 0$.



Résumé : $x'(t) = g(x(t))$ avec $g: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, soit x_0 équilibre.

- Si $\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(Dg(x_0)) \operatorname{Re}(\lambda) < 0$, alors x_0 est asymptotiquement stable.
- Si $\exists \lambda \in \operatorname{Sp}(Dg(x_0)) \operatorname{Re}(\lambda) > 0$, alors x_0 n'est pas stable.