

Cours B : Exponentielle réelle, flot

- Plan:
- 1) Calcul de l'exponentielle dans $M_n(\mathbb{R})$
 - 2) flots et portraits de phase
 - 3) Régularité du flot.

1) Calcul de l'exponentielle dans $M_n(\mathbb{R})$

Rappel: Théorème de Jordan Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(XI_n - A) = (X - \lambda_1)^{p_1} \dots (X - \lambda_r)^{p_r}$,
 $e_i = \dim \text{Ker}(A - \lambda_i I_n)$. $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $P^{-1}AP$ s'écrit

par blocs $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_r \end{pmatrix}$ avec $J_i \in M_{p_i}(\mathbb{C})$ de la forme

$$J_i = \begin{pmatrix} J_{i,11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{i,e_i} \end{pmatrix} \quad \text{avec } J_{i,r} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} \text{ bloc de Jordan de taille } n_{i,r} \in \{1, \dots, p_i\}$$

• le nombre de blocs avec λ_i sur la diagonale de taille $\geq d$ est $\dim \text{Ker}(A - \lambda_i I)^d - \dim \text{Ker}(A - \lambda_i I)^{d-1}$ (cf)

Théorème de Jordan dans $M_n(\mathbb{R})$ Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ses valeurs propres. On suppose que $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ et $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_r \notin \mathbb{R}$.

$\exists Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} J_1 & & & & 0 \\ & J_s & & & \\ & & J'_{s+1} & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & J'_{r/2} \end{pmatrix} \quad \text{où } J_1, \dots, J_s \text{ ont la même forme qu'avant}$$

et $J'_j = \begin{pmatrix} J'_{j,11} & & \\ & \ddots & \\ & & J'_{j,e_j} \end{pmatrix}$ où

$$J'_{j,r} = \begin{pmatrix} a_j & -b_j & 1 & 0 \\ b_j & a_j & 0 & 1 \\ & & a_j & -b_j & 1 & 0 \\ & & b_j & a_j & 0 & 1 \\ & & & & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & & & a_j & -b_j \\ & & & & & & b_j & a_j \end{pmatrix}$$

et les a_j, b_j sont les valeurs propres non réelles de A

On donne juste l'idée de la preuve:

Étape 1: pour $\lambda_i \in \mathbb{R}$, λ_i et $\bar{\lambda}_i$ sont valeurs propres, et les tailles des blocs de Jordan pour ces valeurs propres sont les mêmes par (*) car $\forall d \geq 1$, $\dim \ker (A - \lambda_i I_n)^d = \dim \ker (\overline{A - \lambda_i I_n})^d = \dim \ker (A - \bar{\lambda}_i I_n)^d$.

Étape 2 On regroupe les blocs de même taille correspondant à λ_i et $\bar{\lambda}_i$.
Faisons le sur un exemple.

Vérifions que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a+ib & 1 & & 0 \\ 0 & a+ib & & 0 \\ & & a-ib & 1 \\ 0 & & 0 & a-ib \end{pmatrix} \text{ peut être conjuguée à}$$

$$M' = \begin{pmatrix} a-b & 1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

En effet, par permutation de lignes et colonnes, M peut être conjugué à

$$\begin{pmatrix} a+ib & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+ib & 0 \\ 0 & a-ib & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-ib \end{pmatrix} \text{ puis } \begin{pmatrix} a+ib & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-ib & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a+ib & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-ib \end{pmatrix}$$

Si f est la matrice de $\begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$ dans la matrice canonique (e_1, e_2)

la matrice de f dans la base $(e_1 + e_2, i(e_1 - e_2))$ est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

On conclut avec le lemme suivant:

Lemme Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ tq $A = PBP^{-1}$. Il existe alors $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = QBQ^{-1}$

Preuve: Noton $P = U + tV$ de $AP = PB$ il vient $AU = UB$, $AV = VB$.

Ainsi $P(t) = \det(U + tV)$ est un polynôme non nul en $t = \lambda$.

On peut donc trouver $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(t_0) \neq 0$.

Alors $Q = U + t_0V$ convient



Corollaire Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Toute solution de $x'(t) = Ax(t)$ s'écrit sous la forme

$$x(t) = \sum_{1 \leq i \leq r} e^{t\lambda_i} \left(\sum_{0 \leq k \leq m_i - 1} t^k (\cos(\beta_i t) a_{i,k} + \sin(\beta_i t) b_{i,k}) \right) \quad (*)$$

où $\lambda_i = \operatorname{Re}(\lambda_i)$, $\beta_i = \operatorname{Im}(\lambda_i)$, $a_{i,k}, b_{i,k} \in \operatorname{Ker}((A - \lambda_i)^{m_i})$.

Preuve C'est une conséquence de la décomposition de Jordan dans $M_n(\mathbb{C})$ combiné avec le fait que

$$\exp \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = e^a \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix} \quad \text{vu au cours dernier}$$



On en déduit le comportement asymptotique des solutions.

Un cas particulier intéressant est lorsque $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans \mathbb{C} : alors tous les blocs de Jordan sont de taille 1 : $m_i = 1$ dans $(*)$:

Proposition Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$. Noton $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres. Parmi les solutions de $x'(t) = Ax(t)$:

• $E^s = \bigoplus_{\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0} \operatorname{Ker}(A - \lambda_i) \cap \mathbb{R}^n = \{ x(0) \in \mathbb{R}^n : x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ exponentiellement vite} \}$

• $E^u = \bigoplus_{\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0} \operatorname{Ker}(A - \lambda_i) \cap \mathbb{R}^n = \{ x(0) \in \mathbb{R}^n : x(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0 \text{ exponentiellement vite} \}$

$$E^c = \bigoplus_{\operatorname{Re} \lambda_i = 0} \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_n) \cap \mathbb{R}^n = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : (x(t))_{t \geq 0} \text{ est p\u00e9riodique (d'o\u00f9 born\u00e9)}\}$$

2) Flots et portraits de phase

On consid\u00e8re maintenant l'\u00e9quation $x'(t) = f(x(t))$ avec $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$, avec $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, dite autonome: f ne d\u00e9pend pas explicitement du temps (on peut \u00e9tendre ce qui suit au cas non-autonome $f'(t) = f(t, x(t))$, mais on se restreint au cas autonome pour simplifier)

On dit parfois que $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs

En particulier les solutions sont invariantes par translation du temps: si x est solution, $x(t_0 + \cdot)$ l'est aussi: on pourra se limiter aux conditions initiales avec $t=0$.

D\u00e9finition Pour $x_0 \in \mathcal{D}$, notons $t \mapsto \phi_t(x_0)$ la solution maximale de $x'(t) = f(x(t))$ et I_{x_0} son intervalle de d\u00e9finition

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \end{cases}$$

l'application $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$ est appel\u00e9e flot du champ de vecteurs f (ou de l'\u00e9quation $x' = f(x)$)

Par d\u00e9finition, \u00e0 x fixe $t \mapsto \phi_t(x)$ v\u00e9rifie $\frac{\partial}{\partial t} \phi_t(x) = f(\phi_t(x))$

Pour une \u00e9tude qualitative de l'\u00e9quation diff\u00e9rentielle, il est important d'\u00e9tudier plut\u00f4t $\phi_t: x \mapsto \phi_t(x)$ \u00e0 t fixe. De fa\u00e7on imag\u00e9e, $\phi_t(x)$ est la position \u00e0 l'instant t d'un corps transport\u00e9 par l'\u00e9quation diff\u00e9rentielle qui se trouvait \u00e0 la position x en $t=0$

Exemple Si f est linéaire, $g(x) = Ax$ avec $A \in M_n(\mathbb{R})$, le flot est donné par l'exponentielle:
 $\phi_t(x) = e^{tA} x$ pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Ainsi le flot généralise l'exponentielle de matrice, et possède des propriétés similaires:

Proposition Si $t_1 \in I_x$, $t_2 \in I_{\phi_{t_1}(x)}$, alors $t_1 + t_2 \in I_x$ et $\phi_{t_1+t_2}(x) = \phi_{t_2}(\phi_{t_1}(x))$

En particulier, si $t \in I_x$, $\phi_{-t}(\phi_t(x)) = x$

Preuve: $t \mapsto \phi_{t+t_1}(x)$ est la solution maximale valant $\phi_{t_1}(x)$ en $t=0$, et qui est la définition de $t \mapsto \phi_t(\phi_{t_1}(x))$

En particulier, si $I_x = \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}^n$ (on dit que f est un champ de vecteurs complet), alors $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$ est défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et on a:

- $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$
- $\phi_{-t} \circ \phi_t = \text{Id}$
- $\phi_0 = \text{Id}$
- $\frac{\partial}{\partial t} \phi_t = g \circ \phi_t$

On étudiera plus tard le domaine de définition et la régularité de $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$

Définition L'orbite d'un point $x_0 \in X$ est l'ensemble $O_{x_0} = \{ \phi_t(x_0) : t \in I_{x_0} \}$, aussi appelé trajectoire passant par x_0 . C'est la courbe tracée sur \mathbb{R}^n par la solution maximale de $\begin{cases} x'(t) = g(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

↳ l'invariance par translation implique que $\forall x \in \mathcal{O}_{x_0}$ on a $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_{x_0}$:
deux orbites distinctes ne peuvent pas se croiser.

La partition de \mathcal{R} en orbites est le portrait de phase du champ de vecteurs.

On y trouve 3 sortes d'orbites:

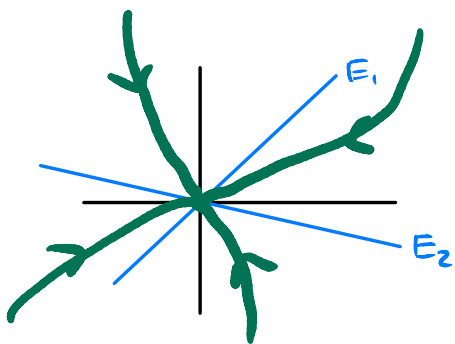
- des points : $\mathcal{O}_{x_0} = \{x_0\}$, qui correspondent à des points fixes de ϕ_t
- des courbes fermées. \exists alors x dans l'orbite et $T > 0$ tel que $\phi_T(x) = x$. Alors $\phi_{t+T}(x) = \phi_t(x) \forall t \in \mathbb{R}$: la solution maximale $t \mapsto \phi_t(x)$ est T périodique.

On parle d'orbite périodique

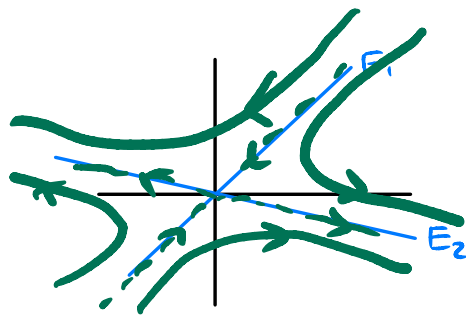
- des courbes ouvertes (avec $\phi_t(x) \neq \phi_s(x)$ si $s \neq t$).

Exemple Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Supposons que A a deux valeurs propres réelles $\neq \lambda_1$ et λ_2 .
Décrivons les portraits de phase possibles en utilisant ce qui a été fait dans

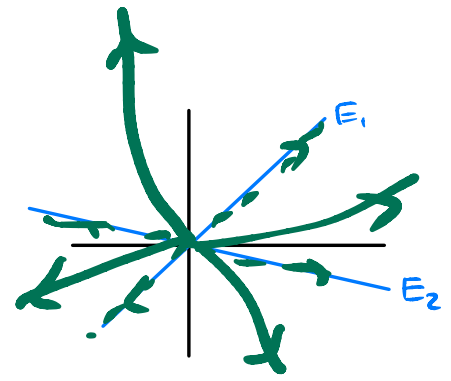
1). Notons $E_1 = \text{Ker}(A - \lambda_1 I_2)$, $E_2 = \text{Ker}(A - \lambda_2 I_2)$



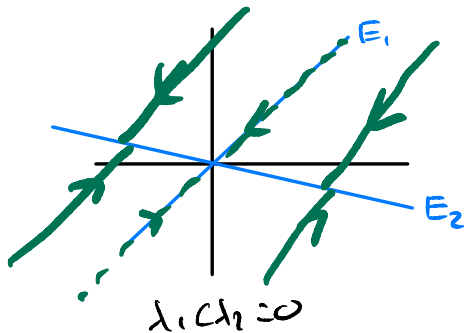
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



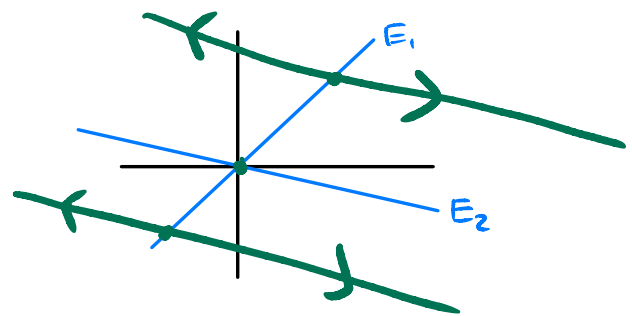
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



$0 < \lambda_1 < \lambda_2$



$\lambda_1 < \lambda_2 = 0$



$0 = \lambda_1 < \lambda_2$

3) Régularité du flot

On considère toujours l'équation $x'(t) = f(x(t))$ avec $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 .
On rappelle qu'on note $t \mapsto \phi_t(x_0)$ la solution maximale avec $x(0) = x_0$ et I_{x_0} son intervalle de définition.

Posons $\mathcal{D} = \{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t \in I_x \}$
le domaine de définition de $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$

Rappels. Une fonction $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ avec U ouvert de \mathbb{R}^n différentiable en $x_0 \in U$ si $\exists L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ linéaire telle que $f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + o(\|h\|)$. On note $D_{x_0} f(h) = L(h)$, qui peut être vue comme une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

• f est C^1 si $Df: U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est continue
 $x \mapsto D_x f$

• Si f et g sont différentiables, $D_x(f \circ g)(h) = D_{g(x)} f(D_x g(h))$ (*)

Théorème (flot)

① \mathcal{D} est ouvert

② $\phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1
 $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$

③ On note $D_x \phi_t(x)$ la différentielle de $x \mapsto \phi_t(x)$ au point x , vue comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $D_x f$ la différentielle de $x \mapsto f(x)$ au point x vue comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\forall (t, x) \in \mathcal{D} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} D_x \phi_t(x) = D_{\phi_t(x)} f \cdot D_x \phi_t(x) \\ D_x \phi_0(x) = \text{Id} \quad (\phi_0(x) = x) \end{cases}$$

Exemple si $x'(t) = A x(t)$, $\phi_t(x) = e^{At} x$ avec $f(x) = Ax$. Alors $D_x \phi_t(x) = e^{At}$, $D_x f = A$
et on a bien $\begin{cases} \frac{d}{dt} e^{At} = A \cdot e^{At} \\ e^{A \cdot 0} = \text{Id}_n \end{cases}$

Exemple dans \mathbb{R}^2 , $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

La solution de $\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = x \end{cases}$ est $\varphi_t(x) = \frac{x}{\|x\|} t + x$.

Vérifions que $\frac{d}{dt} D_x \varphi_t(x)(h) = D_{\varphi_t(x)} f(D_x \varphi_t(x)(h))$ $\forall h \in \mathbb{R}^2$ avec $\langle x, h \rangle = 0$

On a $D_x f(h) = \frac{h}{\|x\|} - \frac{x}{\|x\|^2} \langle x, h \rangle$

En effet, $f(x+h) = \frac{x+h}{\sqrt{\langle x+h, x+h \rangle}} = \frac{x+h}{\sqrt{\|x\|^2 + 2\langle x, h \rangle + \|h\|^2}} = \frac{1}{\|x\|} (x+h) \left(1 + \frac{2\langle x, h \rangle + \|h\|^2}{\|x\|^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{\|x\|} (x+h) \left(1 - \frac{1}{\|x\|^2} \langle x, h \rangle + o(h) \right)$, d'où le résultat.

En choisissant h tel que $\langle x, h \rangle = 0$, on a alors:

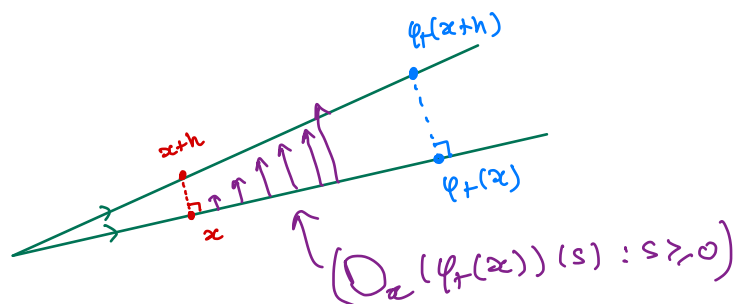
$\bullet D_x \varphi_t(x)(h) = \left(\frac{h}{\|x\|^2} - \frac{x}{\|x\|^2} \langle x, h \rangle \right) t + h = \frac{h}{\|x\|} t + h$

$\bullet D_{\varphi_t(x)} f(h) = \frac{h}{\|\varphi_t(x)\|} = \frac{h}{t + \|x\|}$

On trouve bien $\frac{d}{dt} D_x \varphi_t(x)(h) = \frac{h}{\|x\|}$

et $D_{\varphi_t(x)} f(D_x \varphi_t(x)(h)) = \frac{1}{t + \|x\|} \left(\frac{h}{\|x\|} t + h \right) = \frac{h}{\|x\|}$

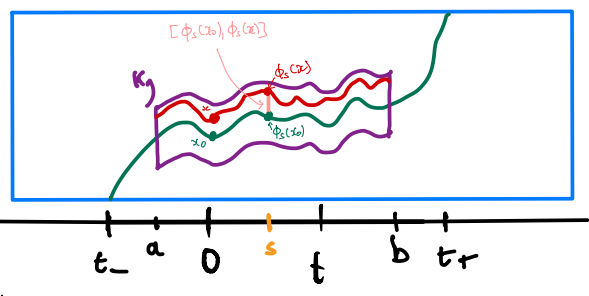
Illustration:



son évolution est régie par Df le long de $(\varphi_t(x))_{t \geq 0}$

Intuition de la formule Si on peut intervenir D et $\frac{d}{dt}$:

$\frac{d}{dt} D_x \varphi_t(x) = D_x \frac{d}{dt} \varphi_t(x) = D_x f(\varphi_t(x)) = D_{\varphi_t(x)} f \cdot D_x \varphi_t(x)$



Preuve Soit $(t, x_0) \in D$

Notons $]t_-, t_+[$ l'intervalle de définition de $t \mapsto \varphi_t(x_0)$. Soit $a \in]t_-, 0[$ et $b \in]t, t_+[$.
 D'après le théorème de dépendance continue des solutions par rapport aux conditions initiales, $\exists \eta > 0, L > 0$ tels que

- ① $K_\eta = \{ (s, z) \in [a, b] \times \mathcal{X} : \|z - \varphi_s(x_0)\| \leq \eta \}$ est un compact inclus dans $[a, b] \times \mathcal{X}$
- ② $\forall x \in \mathcal{X}$ tel que $\|x_0 - x\| \leq \eta$, $s \mapsto \varphi_s(x)$ est défini sur $[a, b]$ et vérifie :
 $\forall s \in [0, t], \|\varphi_s(x_0) - \varphi_s(x)\| \leq e^{Ls} \|x - x_0\|$

- ② montre déjà que D est ouvert
- Pour montrer que $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$ est C^1 , il suffit de montrer que
 - Ⓐ $t \mapsto \phi_t(x)$ est C^1
 - Ⓑ $x \mapsto \phi_t(x)$ est C^1

Ⓐ: provient du fait que $\frac{d}{dt} \phi_t(x) = f(\phi_t(x))$.

Ⓑ: On s'intéresse à $\phi_s(x) - \phi_s(x_0)$ pour x proche de x_0 .

L'idée est de considérer la fonction $T(y) = f(y) - Df(\varphi_s(x_0))y$ pour y proche de $\varphi_s(x_0)$.

Tout d'abord, si $\|x - x_0\| \leq \eta e^{-Lt}$, on a $\forall s \in [0, t] \|\phi_s(x) - \phi_s(x_0)\| \leq \eta$ et $\forall y \in [\phi_s(x_0), \phi_s(x)], (s, y) \in K_\eta$

On rappelle

Inégalité des accroissements finis

Soit $g: O \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec $O \subset \mathbb{R}^p$ ouvert, différentiable. Soient $a, b \in O$. On suppose

$[0, b] = \xi$ et $(1-\eta) \cdot b: \tau \in [0, 1] \ni c \in O$

Alors $\|g(b) - g(a)\| \leq \sup_{x \in [0, b]} \|D_x g\| \|b - a\|$ (dans $[0, 1-\eta]$)

On l'applique à T sur $[\varphi_s(x_0), \varphi_s(x)]$:

$$\|T(\varphi_s(x_0)) - T(\varphi_s(x))\| \leq \sup_{y \in [\varphi_s(x_0), \varphi_s(x)]} \|D_y g - D_{\varphi_s(x_0)} g\| \cdot \underbrace{\|\varphi_s(x_0) - \varphi_s(x)\|}_{\leq e^{Lt} \|x - x_0\|}$$

Mais pour $y \in [\varphi_s(x_0), \varphi_s(x)]$, $(s, y) \in K_y$.

Par uniformité de continuité de Dg sur K_y (g est C^2), on a donc

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \sup_{y \in [\varphi_s(x_0), \varphi_s(x)]} \|D_y g - D_{\varphi_s(x_0)} g\| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \quad (*)$$

Ainsi, $T(\varphi_s(x)) - T(\varphi_s(x_0)) = b(s, x)$ avec b continue et $\sup_{0 \leq s \leq t} b(s, x) = o(\|x - x_0\|)$

$$g(\varphi_s(x)) - g(\varphi_s(x_0)) - D_{\varphi_s(x_0)} g (\varphi_s(x) - \varphi_s(x_0)).$$

En notant $F(s, x) = \varphi_s(x) - \varphi_s(x_0)$ on a donc

$$\frac{d}{ds} F(s, x) = D_{\varphi_s(x_0)} g F(s, x) + b(s, x).$$

La formule de Duhamel donne

$$F(t, x) = R(t, 0) F(0, x) + \int_0^t R(t, s) b(s, x) ds$$

où $R(t, s)$ est la résolvante

$$\text{de } X'(t) = A(t) X(t) \text{ avec } A(t) = D_{\varphi_t(x_0)} g$$

Donc $\varphi_t(x) - \varphi_t(x_0) = R(t, 0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$ par (*) et continuité de R .

On en déduit que $x \mapsto \varphi_t(x)$ est différentiable en x

et que sa différentielle vaut $R(t, 0)$, qui est la solution de

$$\begin{cases} X'(t) = D_{\varphi_t(x)} g X(t) \\ X(0) = I_n. \end{cases}$$

~