

Cours 12: Résolvante, Équa diff's linéaires autonomes

- Plan:
- 1) Cas non homogène
 - 2) Équations différentielles d'ordre n
 - 3) Équations différentielles linéaires autonomes
 - 4) Exponentielles de matrices
 - 5) Calcul de l'exponentielle d'une matrice

1) Cas non homogène

On s'intéresse maintenant au cas non homogène $\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ (*)

Par linéarité, la différence de deux solutions de (*) est solution de l'équation homogène avec $b=0$.

Ainsi, si v est une solution quelconque de (*), toute solution x de (*) s'écrit $x = u + v$ avec u solution de l'équation homogène.

La résolvante est utile pour donner une formule explicite pour la solution de (*) et aussi pour trouver une solution de (*) en pratique

Rappelons que pour $t_0 \in T$, $R_A(t, t_0) \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie $\begin{cases} \frac{d}{dt} R_A(t, t_0) = A(t) R_A(t, t_0) \\ R_A(t_0, t_0) = I_n. \end{cases}$

Théorème (Formule de Duhamel) Soient $t_0 \in T$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. L'unique solution de $\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ est $x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R(t, s)b(s) ds$

Preuve: Par unicité, il suffit de vérifier que ce est solution:

$$u(t_0) = R(t_0, t_0)x_0 + 0 = x_0$$

$$u'(t) = \frac{d}{dt} R(t, t_0)x_0 + \frac{d}{dt} F(t, t) \quad \text{avec} \quad F(u, t) = \int_{t_0}^t R(t, s)b(s)ds$$

$$= \frac{d}{dt} R(t, t_0)x_0 + \frac{\partial}{\partial t} F(t, t) + \frac{\partial}{\partial t} F(t, t)$$

$$= \frac{d}{dt} R(t, t_0)x_0 + R(t, t)b(t) + \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} R(t, s)b(s)ds$$

$$= A(t)R(t, t_0)x_0 + b(t) + \int_{t_0}^t A(t)R(t, s)b(s)ds$$

$$= A(t)(R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R(t, s)b(s)ds) + b(t)$$

$$= A(t)u(t) + b(t)$$

↪

En pratique, on utilise souvent la méthode de "la variation de la constante" pour trouver une solution particulière sous la forme $v(t) = R(t, t_0)c(t)$.

$$\text{En dérivant: } v'(t) = \frac{d}{dt} R(t, t_0)c(t) + R(t, t_0)c'(t) = A(t)v(t) + c'(t)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{A(t)R(t, t_0)}_{v'(t)} c(t) + R(t, t_0)c'(t) = A(t)v(t) + c'(t)$$

$$\text{Ainsi } c'(t) = R(t_0, t)b(t).$$

On peut donc choisir une solution particulière sous la forme

$$v(t) = R(t, t_0) \int_{t_0}^t R(t_0, s)b(s)ds = \int_{t_0}^t R(t, s)b(s)ds \quad (v(t_0) = 0)$$

Cas particulier ($n=1, A(t)=a$)

$$\text{Si } x'(t) = a x(t) + b(t), \quad x(t) = e^{(t-t_0)a} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-s)a} b(s)ds$$

2) Équations différentielles linéaires d'ordre n

Une équation différentielle linéaire d'ordre n (scalaire) est de la forme:

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)}(t) = \beta(t) \quad (*)$$

où $a_i: J \rightarrow \mathbb{R}$, $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues.

Proposition L'équation (*) se résout, en posant $x = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$
 sous la forme $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ où :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

Ainsi, dans le cas $\beta=0$, n solutions $v_1, \dots, v_n : J \rightarrow \mathbb{R}$ forment une base ssi la matrice wronskienne

$$W(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) & \dots & v_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^{(n-1)}(t) & \dots & v_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad \text{est inversible } \forall t \in J,$$

et si (v_1, \dots, v_n) est une base alors pour toute solution v de (*) il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} v(t) = \lambda_1 v_1(t) + \dots + \lambda_n v_n(t) \\ v'(t) = \lambda_1 v_1'(t) + \dots + \lambda_n v_n'(t) \\ \vdots \\ v^{(n-1)}(t) = \lambda_1 v_1^{(n-1)}(t) + \dots + \lambda_n v_n^{(n-1)}(t) \end{cases}$$

3) Équations différentielles linéaires autonomes

Les équations différentielles linéaires autonomes sont de la forme

$$x'(t) = Ax(t)$$

avec $A \in \text{M}_n(K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) et $x : \mathbb{R} \rightarrow K^n$

(A ne dépend pas de t : on parle aussi d'équations différentielles linéaires à coefficients constants)

Cas particulier: $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

On vérifie alors que la solution de $x'(t) = A x(t)$ est

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) e^{\alpha_1(t-t_0)} \\ \vdots \\ x_n(t_0) e^{\alpha_n(t-t_0)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\alpha_1(t-t_0)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha_n(t-t_0)} \end{pmatrix}}_{\text{matrice notée } e^{(t-t_0)A}} x(t_0)$$

Ici nous avons une solution explicite, qui permet d'en déduire le comportement asymptotique des solutions:

- si $\alpha_i < 0 \forall i$, alors toute solution x vérifie $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$
 - si $\alpha_i \leq 0 \forall i$, alors toute solution est bornée
 - si $\alpha_i > 0$, alors $\|x(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} +\infty$ pour tout solution telle que $x_{i_0}(t_0) \neq 0$.
- etc.

Autre cas intéressant: Supposons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.

On peut alors écrire $A = P D P^{-1}$ avec D diagonale et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

On vérifie alors que la solution de $\begin{cases} x'(t) = A x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

$$\text{est } x(t) = P e^{(t-t_0)D} P^{-1} x(t_0)$$

$$\begin{aligned} \text{En effet } x'(t) &= P D e^{(t-t_0)D} P^{-1} x(t_0) \\ &= A P e^{(t-t_0)D} P^{-1} x(t_0) = A x(t). \end{aligned}$$

Plus généralement, nous allons voir que les solutions se calculent à l'aide de la notion d'exponentielle de matrice

4) Exponentielle de matrices

Commençons par quelques rappels

Soit $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On munit $M_n(K)$ d'une norme $\|\cdot\|$ multiplicative ($\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ $\forall A, B \in M_n(K)$), par exemple $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Definition L'exponentielle de matrice est l'application

$$\exp: M_n(K) \rightarrow M_n(K)$$

$$A \mapsto \exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

La série est bien définie car $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ converge absolument:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq e^{\|A\|} < \infty.$$

Rappelons quelques propriétés (sans preuve) de l'exponentielle

Proposition

- \exp est C^∞
- $\forall A \in M_n(K)$, $t \mapsto e^{tA}$ est dérivable et $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A$
- $\forall A \in M_n(K)$, $\exp(A)$ est inversible et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$
- Si $A, B \in M_n(K)$ commutent ($AB = BA$), alors $\exp(A+B) = \exp(A) \exp(B)$
- Si $P \in GL_n(K)$, $A \in M_n(K)$, $P e^A P^{-1} = e^{P A P^{-1}}$
- Si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ est diagonale, alors $\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

Exemple Pour $a, b \in \mathbb{R}$ on a $\exp \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = e^a \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$

En effet écrivons $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a I_2 + b M$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme I_2 et M commutent, $\exp \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = e^a e^{bM}$.

Mais $M^2 = -I_2$, de sorte que

$$e^{bM} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} b^k M^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} b^{2k} (-1)^k I_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (-1)^k b^{2k+1} M$$

$$= \cos b I_2 + \sin b M.$$

Théorème Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{K}^n$. Alors la solution de $\begin{cases} x'(t) = A x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ est $x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0$ pour $t \in \mathbb{R}$

Preuve: Si $x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0$, on a $x(t_0) = e^0 x_0 = I_n x_0 = x_0$
 et $x'(t) = A e^{(t-t_0)A} x_0 = A x(t)$
 d'où l'unicité provient du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Remarque: On peut démontrer l'unicité directement: si y est une autre solution de $\begin{cases} x'(t) = A x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ posons $z(t) = e^{-(t-t_0)A} y(t)$

$$\text{Alors } z'(t) = -A e^{-(t-t_0)A} y(t) + e^{-(t-t_0)A} y'(t) = 0 \quad \text{car } A e^{tA} = e^{tA} A$$

Donc z est constante. Comme $z(t_0) = x_0$, on obtient $y(t) = e^{(t-t_0)A} z(t_0) = e^{(t-t_0)A} x_0$.

Lorsque A est diagonalisable, $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale et $P \in GL_n(\mathbb{C})$,
 $e^{tA} = P e^{tD} P^{-1}$ et on retrouve le fait que la solution est $x(t) = P e^{(t-t_0)D} P^{-1} x(t_0)$

Dans le cas général, la théorie de la réduction des endomorphismes permet de calculer l'exponentielle de matrice.

5) Calcul de l'exponentielle dans $M_n(\mathbb{C})$

Reprenons quelques notions de réduction.

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

- $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A si $\exists v \in \mathbb{C}^n, v \neq 0$, avec $Av = \lambda v$

- Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique $P_A(X) = \det(XI_n - A)$ de A .

Ainsi, si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les différentes valeurs propres de A , on a

$$P_A(X) = (X - \lambda_1)^{p_1} \dots (X - \lambda_r)^{p_r}$$

où $p_1, \dots, p_r \geq 1$ vérifient $p_1 + \dots + p_r = n$.

p_i est la multiplicité algébrique de λ_i

Théorème (Cayley-Hamilton)

Toute matrice annule son polynôme caractéristique :

$$P_A(A) = (A - \lambda_1 I_n)^{p_1} \dots (A - \lambda_r I_n)^{p_r} = 0$$

- La sous-espace propre associée à λ_i est $\Pi_i = \Pi_{\lambda_i} = \text{Ker}(A - \lambda_i I_n)$ sa dimension $p_i = \dim \Pi_i$ est appelée multiplicité géométrique de λ_i .
- La sous-espace caractéristique associée à λ_i est $\Gamma_i = \Gamma_{\lambda_i} = \text{Ker}(A - \lambda_i I_n)^{p_i}$.

Ainsi, $\Pi_i \subset \Gamma_i$ mais ces espaces peuvent être différents.

Théorème (de décomposition des noyaux)

On a $\mathbb{C}^n = \Gamma_1 \oplus \dots \oplus \Gamma_r$ et :

① $\dim \Gamma_i = p_i$

② $\forall x \in \Gamma_i, x \in \Gamma_i \Rightarrow Ax \in \Gamma_i$

③ La restriction de A à Γ_i s'écrit

$$A|_{\Gamma_i} = \lambda_i I_{\Gamma_i} + N_i$$

avec I_{Γ_i} l'identité sur Γ_i et $N_i : \Gamma_i \rightarrow \Gamma_i$ est nilpotent d'indice $\leq p_i$,

c'est-à-dire $N_i^{p_i} = 0$

Remarque . le fait que $N_i^{p_i} = 0$ est une conséquence de la définition de Π_i mais il se peut que $N_i^{m_i} = 0$ avec $m_i < p_i$.

. Une matrice est diagonalisable si \exists base de \mathbb{C}^n de vecteurs propres, ce qui est équivalent à $\mathbb{C}^n = \Pi_1 \oplus \dots \oplus \Pi_r$.

D'après le théorème, ce n'est possible que si $\Pi_i = \mathbb{C}^{p_i} \forall i$. Ainsi A est diagonalisable ssi $\forall 1 \leq i \leq r \dim \Pi_i = p_i$.

. En choisissant une base adaptée à la décomposition, on obtient $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $P^{-1}AP = D + N$

avec D diagonale, d'éléments diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ avec λ_i p_i fois et

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_r \end{pmatrix} \text{ avec } N_i \text{ nilpotents}$$

Le théorème de Jordan permet de mettre N sous forme relativement simple:

Théorème de Jordan Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $P^{-1}AP$ s'écrit

par blocs $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}$ avec $J_i \in M_{p_i}(\mathbb{C})$ de la forme

$$J_i = \begin{pmatrix} J_{i,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{i,e_i} \end{pmatrix} \text{ avec } J_{i,k} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} \text{ une matrice carrée de taille } n_{i,k} \in \{1, \dots, p_i\}$$

On appelle $J = P^{-1}AP$ la forme réduite de Jordan de A et les matrices $J_{i,j}$ les blocs de Jordan. La dimension $n_{i,k}$ est appelée taille du bloc.

Remarque: il est possible de montrer que le nombre de blocs avec λ_i sur la diagonale de taille $\geq d$ est $\dim \text{Ker}(A - \lambda_i)^d - \dim \text{Ker}(A - \lambda_i)^{d-1}$.

Exemple $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_1 & & \\ & & & & \lambda_1 & & \\ & & & & & \lambda_1 & \\ & & & & & & \lambda_1 \end{pmatrix}$ est une réduite de Jordan avec $p_1 = 6$ et $e_1 = 3$ et 3 blocs de tailles 1, 2, 3.

Remarque: Si $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$, N est nilpotente d'ordre 3 et on a $N^k = \begin{pmatrix} 0 & k & \binom{k-1}{2} \\ & 0 & k \\ & & 0 \end{pmatrix}$

Ceci permet de calculer l'exponentielle d'une forme réduite de Jordan, qui se ramène au calcul de l'exponentielle d'un bloc de la forme

$$J_{i,k} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \lambda_i & 1 \\ & & \lambda_i \end{pmatrix} = \lambda_i I + N_{i,k}$$

Nous nous intéressons à sa taille.

On a alors $e^{t J_{i,k}} = e^{t \lambda_i I} e^{t N_{i,k}} = e^{t \lambda_i} e^{t N_{i,k}}$

Comme $N_{i,k}$ est nilpotente d'ordre $n_{i,k}$, on a

$$e^{t N_{i,k}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(t N_{i,k})^l}{l!} = \sum_{l=0}^{n_{i,k}-1} \frac{(t N_{i,k})^l}{l!} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n_{i,k}-1}}{(n_{i,k}-1)!} \\ & 1 & t & \dots & \frac{t^{n_{i,k}-2}}{(n_{i,k}-2)!} \\ & & 1 & \dots & t \\ & & & \dots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

On a ainsi
$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{t \lambda_{1,1}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & e^{t \lambda_{r,2}} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Corollaire Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Toute solution de $x'(t) = Ax(t)$ dans \mathbb{C}^n s'écrit sous la forme

$$x(t) = \sum_{i=1}^r e^{t \lambda_i} \left(\sum_{k=0}^{m_i-1} t^k v_{i,k} \right) \quad \text{où } v_{i,k} \in \mathbb{C}^n.$$

avec $m_i = \max_{1 \leq k \leq e_i} n_{i,k}$

le terme $\sum_{k=0}^{m_i-1} t^k v_{i,k}$ est constant quand $m_i = 1$ (ce qui est le cas quand A est diagonalisable)

On en déduit:

Théorème Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres.

On pose $\Gamma^s = \bigoplus_{\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0} \Gamma_i$, $\Gamma^u = \bigoplus_{\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0} \Gamma_i$, $\Gamma^c = \bigoplus_{\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0} \Gamma_i$.
(espace stable) (espace instable) (espace indifférent)

Soit x une solution de $x'(t) = A x(t)$. Alors

① $x(0) \in \Gamma^s \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$

② $x(0) \in \Gamma^u \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow -\infty} \|x(t)\| = 0$

③ $x(0) \in \Gamma^c \Leftrightarrow \exists M, C > 0$ tel pour $|t|$ assez grand,
 $\frac{1}{C} \|x(0)\| \leq \|x(t)\| \leq C |t|^M \|x(0)\|$

↳ Pour un $x(0)$ général, on le décompose en $x^s + x^u + x^c$.