Analyse IV – USTC
Igor Kortchemski

Cours 11 : Influence des conditions initiales, équations différentielles linéaires

Plan :
1) Continuité par rapport aux données initiales
2) Équations différentielles linéaires : existence, unicité globales.
3) La résolvante

1) Continuité par rapport aux données initiales

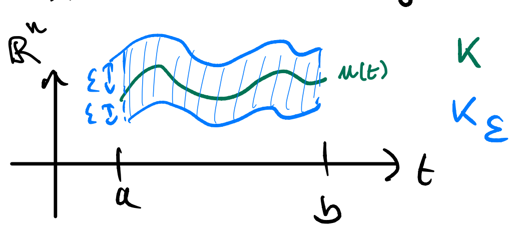
Soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue semi-lipschitzienne. Soit $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$. D'après Cauchy-Lipschitz, $\exists !$ solution maximale de $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ $(\star)$. On veut savoir comment cette solution maximale, et son domaine de définition, dépendent de la condition initiale.

Définition Soit $u : [a,b] \to \Omega$ la restriction d'une solution de $(\star)$ à sous-intervalle compact de son intervalle de définition. Le graphe de u est

$$K(u) = \{ (t, u(t)) \, ; \, t \in [a,b] \} \subset J \times \Omega$$

Pour $\varepsilon > 0$, le ε-tube autour de K est

$$K_\varepsilon^{(u)} = \{ (t,y) : t \in [a,b], \ \|y - u(t)\| \leq \varepsilon \} \subset J \times \mathbb{R}^n$$

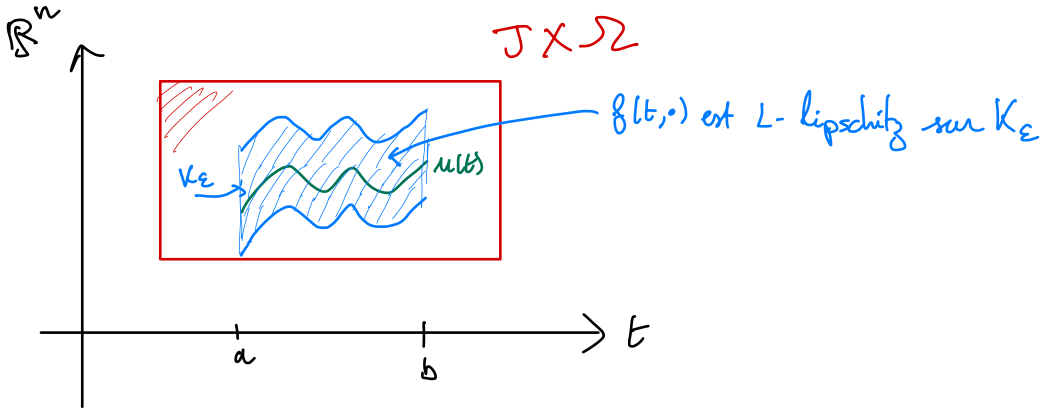


Lemme $\exists \varepsilon > 0$ tel que

(1) $K_\varepsilon(u)$ est un compact inclus dans $J \times \Omega$

(2) $\exists L > 0$ tel que si $(t,x) \in K_\varepsilon^{(u)}$ et $(t,y) \in K_\varepsilon(u)$, $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \|x - y\|$.

illustration :



Preuve :

Pour simplifier les notations on pose $K = K(u)$, $K_\varepsilon = K_\varepsilon(u)$.

① On munit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ de la distance $d((t,x),(s,y)) = |t-s| + \|x-y\|$.

K est compact comme image du compact $[a,b]$ par l'application continue $t \mapsto (t, x(t))$.

K_ε étant fermé borné, il est compact. Comme $K \subset J \times \Omega$, on a $d(K, (J\times\Omega)^c) > 0$.

par compacité, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $d(K^\varepsilon, (J\times\Omega)^c) > 0$. donc $K^\varepsilon \subset J \times \Omega$.

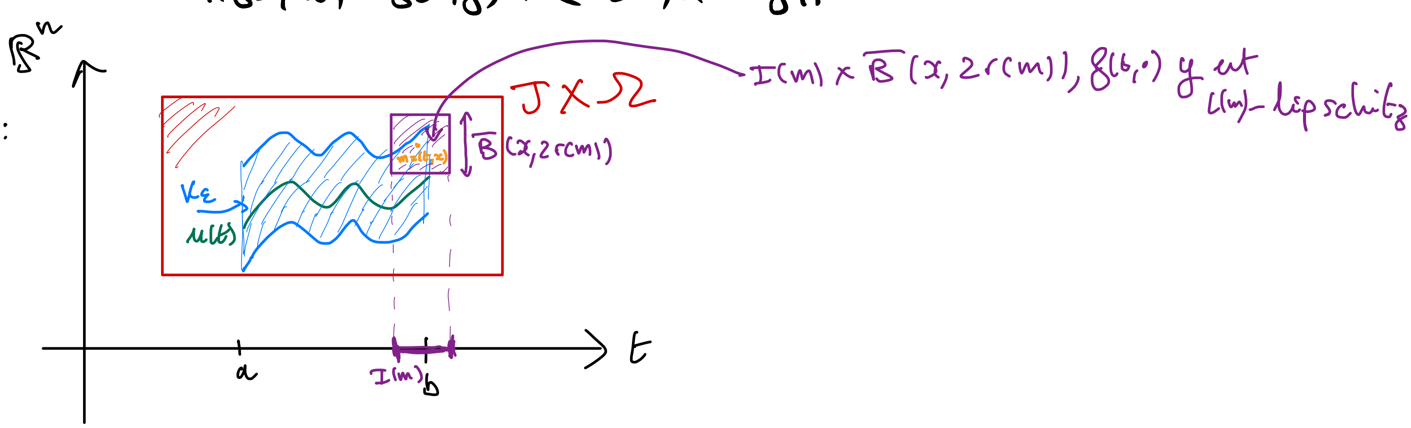
② Si f est C^1, on a immédiatement $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \sup_{K_\varepsilon} \|D_x f\| \, \|x-y\|$

Dans le cas général il faut être plus fin.

Par hypothèse semi-lipschitz, pour tout $m = (t,x) \in K_\varepsilon$ on peut trouver :

- un intervalle ouvert $I(m)$ contenant t (pas forcément inclus dans $[a,b]$)
- une boule $\overline{B}(x, 2r(m))$ incluse dans Ω
- $L_m > 0$ tel que $\forall (t,x)$ et $(t,y) \in I(m) \times \overline{B}(x, 2r(m))$,
  $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(m)\|x-y\|$

illustration :



Du recouvrement ouvert $K_\varepsilon \subset \bigcup_{m=(t,x)\in K_\varepsilon} I(m) \times B(x, r(m))$

On extrait un recouvrement fini $K_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^{p} I(m_i) \times B(x_i, r(m_i))$

avec $m_i = (t_i, x_i) \in K_\varepsilon$

Posons $\ell = \max_{1\leq i\leq p} \ell(m_i)$, $r = \min_{1\leq i \leq p} r(m_i)$, $M = \sup_{K_\varepsilon} \|f\|$

Soient (t, x) et $(t, y) \in K_\varepsilon$.

Cas 1 : $\|x-y\| < r$.

Alors $\exists\, 1\leq i\leq p$ tel que $(t,x) \in I(m_i) \times B(x_i, r(m_i)) \subset I(m_i) \times \overline{B}(x_i, r(m_i))$

Alors $(t,y) \in I(m_i) \times \overline{B}(x_i, 2r(m_i))$

Donc $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \ell(m_i)\|x-y\| \leq \ell\|x-y\|$

Cas 2 : $\|x-y\| > r$

Alors $\dfrac{\|f(t,x) - f(t,y)\|}{\|x-y\|} \leq \dfrac{2M}{r}$

Ainsi $L = \max(\ell, \frac{2M}{r})$ convient

On rappelle :

Lemme (Gronwall) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $t_0 \in I$. On suppose qu'il existe $c_0, c > 0$ tq $f(t) \leq c_0 + c\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds \quad \forall t\in I,\ t\geq t_0$.

Alors

$$f(t) \leq c_0 e^{c(t-t_0)} \quad \forall t \in I, t\geq t_0$$

Théorème (dépendence continue des solutions par rapport aux conditions initiales)

Soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue semi-lipschitzienne. Soit $u : [a,b] \to \Omega$ la restriction d'une solution de $x'(t) = f(t, x(t))$ (condition initiale quelconque dans $J \times \Omega$) à un sous-intervalle compact $[a,b]$ de son domaine de définition.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $K_\varepsilon(u) \subset J \times \Omega$.

Il existe $\eta \in]0, \varepsilon[$ tel que si y est une solution maximale de

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases} \text{ avec } (t_0, x_0) \in K_\eta(u)$$

alors :

① y est définie sur un intervalle ouvert contenant $[a,b]$

② $\forall t \in [a,b]$ on a $(t, y(t)) \in K_\varepsilon(u)$, c'est-à-dire

$$\sup_{t \in [a,b]} \|u(t) - y(t)\| \leq \varepsilon$$

③ $\exists M, L > 0$ tels que si y_0 et y_1 sont les solutions sur $[a,b]$ de

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

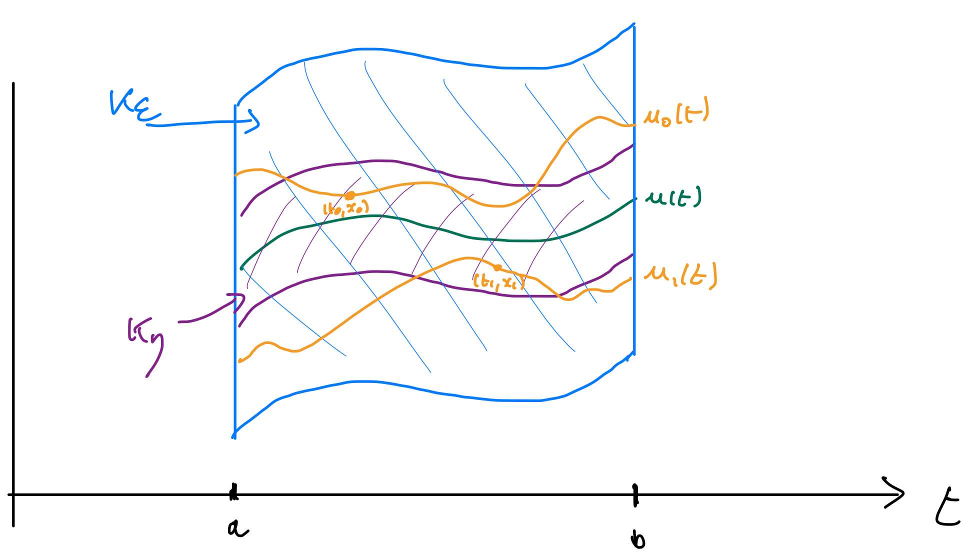
avec $(t_0, x_0) \in K_\eta(u)$ et $(t_1, x_1) \in K_\eta(u)$

alors $\forall t \in [a,b]$, $\| y_1(t) - y_0(t) \| \leq (\|x_1 - x_0\| + M|t_1 - t_0|) e^{L|t - t_0|}$

En particulier, si $t_1 = t_0$ on a :

$\forall t \in I \quad \| y_1(t) - y_0(t) \| \leq \| x_1 - x_0 \| e^{L|t - t_0|}$

illustration :



<u>Preuve</u> : Pour simplifier les notations on pose $K = K(u)$ $K_\varepsilon = K_\varepsilon(u)$

Soit $L > 0$ tel que si $(t,x) \in K_\varepsilon$ et $(t,y) \in K_\varepsilon$, $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|$ $(**)$ (lemme précédent)

On montre le résultat avec $\eta < \varepsilon e^{-L(b-a)}$.

<u>Preuve de ① et ②</u>

Soit $y : I \to \Omega$ une solution maximale de

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{avec } (t_0, x_0) \in K_\eta$$

On travaille dans le futur de t_0 (même raisonnement dans le passé)

<u>Étape 1</u> On montre que $t \in [t_0, b] \cap I \Rightarrow \|u(t) - y(t)\| < \varepsilon$.

Si ce n'est pas le cas, soit $t_1 = \inf\{ t \in [t_0, b] \cap I : \|u(t) - y(t)\| \geq \varepsilon \}$

Ainsi $\|u(t_1) - y(t_1)\| = \varepsilon$ et $\|u(t) - y(t)\| \leq \varepsilon$ pour $t_0 \leq t < t_1$, de sorte que $(t, y(t)) \in K_\varepsilon$, et clairement $(t, u(t)) \in K_\varepsilon$. Ainsi, pour $t_0 \leq t \leq t_1$,

$$\|u(t) - y(t)\| \leq \|u(t_0) - y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|f(s,u(s)) - f(s,y(s))\|}_{\leq L\|u(s) - y(s)\| \text{ par } (**)} ds$$

Donc par Gronwall $\|u(t_1) - y(t_1)\| \leq \|u(t_0) - y(t_0)\| \exp(L(t_1 - t_0))$

$$\leq \eta e^{L(b-a)} < \varepsilon, \text{ absurde.}$$

<u>Étape 2</u> par l'absurde supposons $\sup I \leq b$

D'après ce qui précède, $\forall t \in [t_0, \sup I]$ on a $(t, y(t)) \in K_\varepsilon \subset J \times \Omega$

Donc $\forall t \in [t_0, \sup I]$, $y(t) \in p(K_\varepsilon)$ où $p : (t,x) \longmapsto x$.

$p(K_\varepsilon) \subset \Omega$ est compact comme image de K_ε par p continue.

Cela contredit le lemme de sortie définitive de tout compact.

<u>Preuve de ③</u>

Par définition $\forall t \in [a,b]$, $y_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_0(s)) ds$ et $y_1(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(s, y_1(s)) ds$

Donc $\|y_1(t) - y_0(t)\| \leq \|x_1 - x_0\| + \left\| \int_{t_1}^{t} f(s, y_1(s)) ds - \int_{t_0}^{t} f(s, y_0(s)) ds \right\|$

Donc $\|y_1(t) - y_0(t)\| \le \|x_1 - x_0\| + \|\int_{t_1}^{t_0} f(s, y_1(s))\, ds\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))\| ds$

En notant $M = \sup_{V_\varepsilon} \|f\|$ on a donc

$$\|y_1(t) - y_0(t)\| \le \|x_1 - x_0\| + M|t_1 - t_0| + L \int_{t_0}^{t} \|y_1(s) - y_0(s)\| ds$$

On conclut avec le lemme de Gronwall.

Corollaire Soit $(t_n, x_n) \in J \times \Omega$ avec $(t_n, x_n) \to (t_0, x_0)$

Notons u_0, u_n les solutions des problèmes $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_n) = x_n \end{cases}$

définies sur un même intervalle borné. Alors $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0\|_\infty = 0$

On démontre de la même manière le résultat suivant :

Proposition Soient $f, g : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ tq $\|f - g\|_\infty \le \varepsilon$. Soit $I \subset J$ tel que les solutions u, v de $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ $\begin{cases} x'(t) = g(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ sont définies sur I.

Alors $\forall t \in I, \ \|u(t) - v(t)\| \le \varepsilon\, |t - t_0| e^{L|t - t_0|}$

En utilisant les mêmes idées, on démontre le résultat suivant (continuité par rapport à des paramètres, admis) :

Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$ ouvert (espace des paramètres)

Soit $f : J \times \Omega \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ continue, localement lipschitzienne par rapport à la deuxième et troisième variable.

Alors $\forall (t_0, x_0, \varepsilon_0) \in J \times \Omega \times \Lambda$, $\exists W$ voisinage de ε_0 tel que $\forall \varepsilon \in W$ les problèmes de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), \varepsilon) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), \varepsilon_0) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

admettent deux solutions u_ε et u_{ε_0} définies sur un même intervalle borné, et de plus $\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}\|_\infty \xrightarrow[\varepsilon \to \varepsilon_0]{} 0$

2) Équation différentielles linéaire : existence et unicité globales

Dans ce cadre, on s'intéresse au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où :
- $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert
- $A : J \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une application de classe C^k $(k \in \{0, 1, 2, .., \infty\})$
- $b : J \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^k.
- $t_0 \in J$, $x_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(ici $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ avec $f(t,x) = A(t)x + b(t)$)

Lorsque $b \equiv 0$ est la fonction nulle, on parle d'équation linéaire homogène.

(Cauchy-Lipschitz linéaire)

Théorème Soient $t_0 \in J$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. L'unique solution maximale $u :]t_-, t_+[\to \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

est globale, c'est à dire que $]t_-, t_+[= J$

⚠ le fait que toutes les solutions maximales sont globales est propre aux équations linéaires

Preuve : On vérifie le critère de sous-linéarité.

- On utilise la norme matricielle $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$

qui vérifie $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ $\forall x \neq 0$.

- On pose $f(t,x) = A(t)x + b(t)$, continue.

- Vérifions que f est semi-lipschitzienne. Soit $(t_0, x_0) \in J \times \mathbb{R}^n$.

  Soit $\eta > 0$. Pour $|t - t_0| < \eta$, $x, y \in \overline{B}(x_0, \eta)$ on a

  $$\|f(t,x) - f(t,y)\| = \|A(t)(x-y)\| \leq \underbrace{\sup_{t \in [t_0-\eta, t_0+\eta]} A(t)}_{< \infty \text{ par continuité de } A.} \|x-y\|$$

  Les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sont donc satisfaites.

- Vérifions le critère de sous-linéarité

  Soit K compact $\subset J$. Pour $t \in K$, $x \in \mathbb{R}^n$ on a

  $$\|f(t,x)\| \leq \|A(t)\| \|x\| + \|b(t)\| \leq C_1 + C_2 \|x\|$$

  avec $C_2 = \sup_{t \in K} \|A(t)\|$ et $C_1 = \sup_{t \in K} \|b(t)\|$

  où $C_1 < \infty$ et $C_2 < \infty$ par continuité.

3) La résolvante

On se place dans le cas homogène $x'(t) = A(t)x(t)$. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble de ses solutions (pour toutes les conditions initiales possibles).

Proposition $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$ de dimension n.

Preuve :
- Il est clair que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$.
- Fixons $t_0 \in J$ et posons $T_{t_0} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, linéaire.

  $$f \longmapsto f(t_0)$$

  D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, T_{t_0} est surjective (existence) et injective (unicité) donc T_{t_0} est un isomorphisme d'espaces vectoriels

Proposition Soient $u_1, \dots, u_n : J \to \mathbb{R}^n$ des solutions de $x'(t) = A(t)x(t)$.
On a équivalence entre
(1) $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathcal{E}$
(2) $\forall t_0 \in J$, $(u_1(t_0), \dots, u_n(t_0))$ est une base de $\mathbb{R}^n$
(3) $\exists t_0 \in J$, $(u_1(t_0), \dots, u_n(t_0))$ est une base de $\mathbb{R}^n$

Preuve: $(1) \Rightarrow (2)$ provient du fait que T_{t_0} est un isomorphisme
$(2) \Rightarrow (3)$ clair
$(3) \Rightarrow (1)$ Comme T_{t_0} est un isomorphisme,
$(T_{t_0}^{-1} u_1(t_0), \dots, T_{t_0}^{-1} u_n(t_0)) = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathcal{E}$

Remarque Si $u_1, \dots, u_n$ est une base de $\mathcal{E}$, alors pour toute fonction u telle que $u'(t) = A(t)\, u(t)$ il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in J$ on a $u(t) = \lambda_1 u_1(t) + \dots \lambda_n u_n(t)$.

Définition Soit $u_1, \dots, u_n$ base de $\mathcal{E}$. On appelle la matrice wronskienne associée à $u_1, \dots, u_n$ la matrice $W(t) = (\underbrace{u_1(t)}_{\in \mathbb{R}^n}, \dots, \underbrace{u_n(t)}_{\in \mathbb{R}^n}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Comme $\forall t \in J$, $(u_1(t), \dots, u_n(t))$ est une base de $\mathbb{R}^n$, $W(t)$ est inversible. Par ailleurs, $W'(t) = A(t) W(t)$ $\forall t \in J$.

Définition Soit $t_0 \in J$. Notons $u_1(t, t_0), \dots, u_n(t, t_0)$ les solutions du problème de Cauchy
$$\begin{cases} x'(t) = A(t)\, x(t) \\ x(t_0) = e_i = i\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$
avec $(e_1, \dots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$.

La matrice $R_A(t, t_0) = (u_1(t, t_0), \dots, u_n(t, t_0)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est appelée matrice résolvante
(c'est la matrice wronskienne dans une base particulière)

Proposition Soit $t_0 \in J$. On a :

$$\begin{cases} \cdot \ \frac{d}{dt} R_A(t,t_0) = A(t)\, R_A(t,t_0) \\ \cdot \ R_A(t_0,t_0) = I_n \quad (\text{matrice identité de } \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

Si A est de classe C^k, $t \mapsto R_A(t,t_0)$ est de classe C^{k+1}

En particulier, $u(t) = R(t,t_0)\, x_0$ est la solution de $\begin{cases} \cdot\ x'(t) = A(t)x(t) \\ \cdot\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Preuve : • $R_A(t_0,t_0) = (e_1, \dots, e_n) = I_n$.

• le fait que $\frac{d}{dt} R_A(t,t_0) = A(t) R_A(t,t_0)$ provient du fait que $t \mapsto R_A(t,t_0)$ est la matrice wronskienne associée à la base $(\xi_1, \dots, \xi_n)$

• Ainsi, en posant $u(t) = R(t,t_0)x_0$:

On a bien $u(t_0) = I_n x_0 = x_0$

et $u'(t) = \frac{d}{dt} R(t,t_0)\, x_0 = A(t) R(t,t_0)\, x_0 = A(t) u(t)$.

Proposition On a

(1) $\forall t_0, t_1, t_2 \in J$, $R_A(t_2,t_0) = R_A(t_2,t_1) R_A(t_1,t_0)$.

(2) $\forall t_0, t_1 \in J$, $R_A(t_0,t_1)^{-1} = R_A(t_1,t_0)$

Preuve : (1) Soient $t_0, t_1 \in J$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On pose $u(t) = R_A(t,t_0)\, x_0$ $\quad v(t) = R_A(t,t_1) R_A(t_1,t_0)\, x_0$ pour $t \in J$. Il suffit de montrer que $u = v$.

* $u(t_1) = R_A(t_1,t_0)\, x_0$ et $v(t_1) = I_n \cdot R_A(t_1,t_0)\, x_0$

• u et v sont solutions de $x'(t) = A(t) x(t)$:

$u'(t) = \frac{d}{dt} R_A(t,t_0)\, x_0 = A(t)\, R_A(t,t_0)\, x_0 = A(t) u(t)$

$v'(t) = \frac{d}{dt} R_A(t,t_1)\, R_A(t_1,t_0)\, x_0 = A(t) R_A(t,t_1)\, R_A(t_1,t_0)\, x_0 = A(t) v(t)$.

Donc $u = v$

(2) On prend $t_2 = t_0$

Exemple ($n=1$) Dans ce cas $A(t) = a(t) \in \mathbb{R}$.

L'équation devient $x'(t) = a(t)x(t)$.

Ainsi, $R(t,t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)$

Cependant, en général, il est très rare de pouvoir donner une expression explicite de la résolvante.

On verra en revanche que l'on peut obtenir des informations qualitatives sur les solutions grâce à l'étude de la résolvante.

Rappel :

Pour $t_0 \in I$, $R_A(t,t_0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $\begin{cases} \frac{d}{dt} R_A(t,t_0) = A(t) R_A(t,t_0) \\ R_A(t_0,t_0) = I_n. \end{cases}$

Proposition Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. La fonction $\Delta(t) = \det R_A(t,t_0)$ vérifie l'équation différentielle

$$\begin{cases} \Delta'(t) = \operatorname{tr}(A(t))\,\Delta(t) \\ \Delta(t_0) = 1 \end{cases}$$

Ce qui implique $\det R_A(t,t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}(A(s))\,ds\right)$

Preuve : Vérifions que pour $R \in GL_n(\mathbb{R})$ la différentielle de $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ vaut

$$D_R \det(H) = \det(R)\operatorname{tr}(R^{-1}H) \quad \text{pour } H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On sait que det est différentiable comme fonction polynomiale.

Alors $D_R \det(H) = \lim_{t \to 0} \frac{\det(R+tH) - \det R}{t}$

Or $\det(R+tH) = \det(R)\det(I_n + tR^{-1}H)$.

En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres complexes de $R^{-1}H$, on a

$$\det(I_n + t R^{-1}H) = \prod_{i=1}^{n} (1 + t\lambda_i) = 1 + \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) t + o(t^2)$$
$$= 1 + t\,\mathrm{tr}(R^{-1}H) + o(t^2).$$

Donc $\dfrac{\det(R+tH) - \det R}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} \det R \,\mathrm{Tr}(R^{-1}H)$,

d'où le résultat.

Ainsi, par composition

$$\Delta'(t) = D_{R_A(t,t_0)} \det\left(\frac{d}{dt} R_A(t,t_0)\right)$$
$$= \det R_A(t,t_0) \times \mathrm{Tr}\left(R_A(t,t_0)^{-1} \cdot A(t) R_A(t,t_0)\right)$$
$$= \Delta(t) \times \mathrm{Tr}(A(t) R_A(t,t_0) R_A(t,t_0)^{-1})$$
$$= \Delta(t)\,\mathrm{Tr}(A(t)).$$

<u>Remarque</u> : une matrice wronskienne $W(t)$ vérifie $W'(t) = A(t) W(t)$, et on en déduit avec la même preuve qu'en notant $\Delta_W(t) = \det W(t)$ on a $\Delta_W'(t) = \mathrm{tr}(A(t))\,\Delta_W(t)$ $\forall t \in J$

Exemple

- Résolvons $\begin{cases} x' = -x\tan t + y \\ y' = x + y \tan t \end{cases}$ sur $J =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

On a $A(t) = \begin{pmatrix} -\tan t & 1 \\ 1 & \tan t \end{pmatrix}$

On remarque que $u_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \tan t \end{pmatrix}$ est solution

Comment trouver une autre solution ? Idée : utiliser $\operatorname{tr} A(t) = 0$

Supposons que $u_2(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est une solution linéairement indépendante

Alors $W(t) = \begin{pmatrix} 1 & x(t) \\ \tan t & y(t) \end{pmatrix}$ $\quad \det W(t) = y(t) - \tan t \; x(t) = c$

Donc $y(t) = x(t) \tan t + c = y(t) - x'(t) + c$

Donc $x'(t) = c$ $\quad$ Donc $x(t) = ct + b$.

Donc $y(t) = ct \tan(t) + b \tan t + c$. On prend $b = 0$, $c = 1$.

Donc $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \tan t + 1 \end{pmatrix}$

Corollaire Si $\forall t \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{Tr} A(t) = 0$, alors $\forall s,t \in J$ $\det R_A(t,s) = 1$.

Il est possible d'interpréter cela comme le fait que l'équation différentielle "conserve les volumes"

Proposition On suppose $\forall t \in J$, $A(t)$ est antisymétrique (${}^tA(t) = -A(t)$). Alors

① $\forall s,t \in J$, $R_A(t,s)$ est une matrice orthogonale ($\det R_A(t,s) = 1$ et ${}^tR_A(t,s) R_A(t,s) = I_n$)

② si x est solution, $\forall t \in J$ $\|x(t)\| = \|x(t_0)\|$

Preuve : On sait déjà que $\det R_A(t,s) = 1$. D'autre part :

$$\frac{d}{dt}\left({}^tR_A(t,s) R_A(t,s)\right) = \frac{d}{dt}\left({}^tR_A(t,s)\right) R_A(t,s) + {}^tR_A(t,s) \frac{d}{dt} R_A(t,s)$$
$$= {}^tR_A(t,s)\, {}^tA(t)\, R_A(t,s) + {}^tR_A(t,s) A(t) R_A(t,s)$$
$$= {}^tR_A(t,s) \left({}^tA(t) + A(t)\right) R_A(t,s)$$
$$= 0.$$

Donc ${}^tR_A(t,s) R_A(t,s)$ est constant, et pour $t = s$ vaut I_n.

② On a $\|x(t)\|^2 = \|R(t,t_0) x(t_0)\|^2 = {}^tx(t_0)\, {}^tR(t,t_0) R(t,t_0)\, x(t_0)$
$$= {}^tx(t_0) x(t_0) = \|x(t_0)\|^2$$