Analyse IV – USTC
Igor Kortchemski

Cours 10 : Théorème de Péano, solutions maximales

Plan : 1) Théorème de Cauchy-Péano
2) Solutions maximales
3) Durée de vie
4) Solutions globales

1) Théorème de Cauchy-Péano

Théorème (Cauchy-Péano)
Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue. Soit $(t_0, x_0) \in U$, $\eta, \rho, M > 0$ tels que $[t_0-\eta, t_0+\eta] \times \overline{B}(x_0, \rho) \subset U$ et :

- $\|f(t,x)\| \leq M \quad \forall (t,x) \in [t_0-\eta, t_0+\eta] \times \overline{B}(x_0,\rho)$

Alors $\forall \varepsilon < \min(\eta, \frac{\rho}{M})$, sur $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$, le problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ admet une solution.

⚠ il n'y a pas forcément unicité (cf exemple cours précédent
$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{\max(x(t), 0)} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

On utilisera le théorème d'Arzela-Ascoli :

Théorème (Arzela-Ascoli)

Soient $a<b$, $a,b \in \mathbb{R}$ et notons $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n) = \{g : [a,b] \to \mathbb{R}^n \text{ continue}\}$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.
Soit $(g_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$ telle que :

1) $\exists\, x \in [a,b]$: $(g_n(x))_{n\geq 1}$ est bornée
2) En notant $\omega_g(\delta) = \sup\{\|g(x)-g(y)\| : |x-y|\leq \delta,\ x,y\in[a,b]\}$

on a $\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \sup_{n\geq 1} \omega_{g_n}(\delta) \leq \varepsilon$

Alors il existe une sous-suite de (g_n) qui converge uniformément

Remarque Pour une fonction g, on a g continue $\iff \omega_g(\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$

Preuve du théorème de Cauchy-Peano

Posons $K = [t_0-\eta, t_0+\eta] \times \bar{B}(x_0,\rho)$

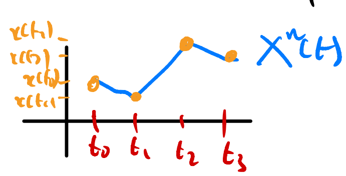
Soit $\varepsilon < \min(\eta, \frac{\rho}{M})$.

On note $t_i = t_0 + i\frac{\varepsilon}{n+1}$ pour $0 \leq i \leq n+1$, subdivision de $[t_0, t_0+\varepsilon]$ de pas $\frac{\varepsilon}{n+1}$.

On construit des points de $\mathbb{R}^n$ $(x_i)_{0\leq i\leq n+1}$ par récurrence :

$x_{i+1} = x_i + \frac{\varepsilon}{n+1} f(t_i,x_i)$ pour $0\leq i\leq n$

On définit alors $X_n(t)$, $t_0\leq t\leq t_0+\varepsilon$ par interpolation linéaire



(I) On vérifie que $\forall 0\leq i\leq n+1$, $(t_i,x_i)\in K$.
Pour cela, on montre par récurrence que

$$\|x_i - x_0\| \leq \frac{i\varepsilon M}{n+1} \quad \text{pour } 0\leq i\leq n+1$$

- Pour $i=0$: ok
- Hérédité : Si $\|x_i - x_0\| \leq \frac{i\varepsilon M}{n+1}$ pour $i<n$, on a

$$\|x_{i+1}-x_0\| \leq \|x_{i+1}-x_i\| + \|x_i - x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{n+1}\underbrace{\|f(t_i,x_i)\|}_{\leq M} + \frac{i\varepsilon M}{n+1} \leq \frac{(i+1)\varepsilon M}{n+1}.$$

Ainsi, $\forall 0\leq i\leq n+1$, $(t_i,x_i)\in K$.

(2) Pour $0 \le r \le n$ et $t_i < t < t_{i+1}$ on a $X_n'(t) = f(t_i, x_i)$, donc $\|X_n'(t)\| \le M$.
On en déduit que X_n est M-lipschitzienne sur $[t_0, t_0+\varepsilon]$.
De plus $X_n(t_0) = x_0$ donc $(X_n(t_0))_{n \ge 1}$ est bornée.
Par Arzela-Ascoli, quitte à extraire on peut supposer que $X_n \to X$ uniformément sur $[t_0, t_0+\varepsilon]$

(3) Pour $0 \le r \le n$ et $t_i < t < t_{i+1}$ on a
$$\| X_n'(t) - f(t, X_n(t))\| = |f(t_i, x_i) - f(t, X_n(t))| \le \omega_f\left(\frac{\varepsilon}{n+1} + M\frac{\varepsilon}{n+1}\right)$$
(car $|x_{i+1} - x_i| \le M \cdot \frac{\varepsilon}{n+1}$)

où $\omega_f(\delta) = \sup\{\|f(t,x) - f(u,y)\| : |t-u| + \|x-y\| \le \delta, \ (t,x) \in K, \ (u,y) \in K\} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$ par uniforme continuité de f sur K

Par inégalité des accroissements finis on obtient $\forall t_0 \le t \le t_0+\varepsilon$
$$\| X_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(u, X_n(u))\,du \| \le \omega_f\left((1+M)\frac{\varepsilon}{n+1}\right) |t - t_0|$$
En passant à la limite lorsque $n \to \infty$, par convergence uniforme on en déduit que $\forall t_0 \le t \le t_0+\varepsilon$
$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, X(u))\,du.$$

En dérivant, on obtient une solution sur $[t_0, t_0+\varepsilon]$. On construit de même une solution sur $[t_0-\varepsilon, t]$ et elles se recollent en une solution sur $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ car les dérivées à droite et à gauche en t_0 sont $f(t_0, x_0)$.

∞

Nous allons maintenant passer à l'étude de l'intervalle de définition des solutions du problème de Cauchy.

2) Solutions maximales

Soit $U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue, semi-lipschitzienne

Définition On dit qu'une solution $u : I \to \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy $x'(t) = f(t, x(t))$ est une solution <u>maximale</u> (ou non prolongeable) si elle n'a pas de prolongement à un intervalle strictement plus grand, c'est-à-dire si elle n'est pas la restriction à I d'une solution définie sur un intervalle $I' \supsetneq I$.

Rappel: une solution du problème de Cauchy $x'(t) = f(t, x(t))$ est une fonction dérivable $u : I \to \mathbb{R}^n$ telle que :

(1) I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $u(t_0) = x_0$

(2) $\forall t \in I,\ (t, u(t)) \in U$

(3) $\forall t \in I,\ u'(t) = f(t, u(t))$

On va démontrer le résultat suivant :

Théorème Pour toute donnée initiale $(t_0, x_0) \in U$, il existe une unique solution $u :]t_-, t_+[\to U$ définie sur un intervalle ouvert avec $u(t_0) = x_0$ telle que toute autre solution vérifiant cette condition initiale est une restriction de u à un sous-intervalle de $]t_-, t_+[$
Cette solution est dite maximale.

Remarque L'intervalle de définition d'une solution maximale est toujours ouvert

Pour $u : I_1 \to \mathbb{R}^n$ et $v : I_2 \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions telles que $u = v$ dans $I_1 \cap I_2$, leur <u>recollement</u> est la fonction $u * v : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$u * v(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t \in I_1 \\ v(t) & \text{si } t \in I_2 \end{cases}$$

La preuve du théorème repose sur le résultat suivant

Proposition Soient $u : I_1 \to \mathbb{R}^n$ et $v : I_2 \to \mathbb{R}^n$ deux solutions du problème de Cauchy de $x'(t) = f(t, x(t))$ définies sur des intervalles ouverts et telles que $u(t_0) = v(t_0)$ pour un certain $t_0 \in I_1 \cap I_2$. Alors :

① $u = v$ sur $I_1 \cap I_2$

② le recollement de u et v est une solution définie sur $I_1 \cup I_2$.

Avant les preuves, donnons un exemple

Exemple : Soit $x'(t) = x(t)^2$ avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto x^2$, continue, C^1, donc semi-lipschitz.

La solution valant x_0 en t_0 est $x(t) = \dfrac{x_0}{(t_0 - t) x_0 + 1}$. L'intervalle maximal de définition de cette solution est

$$\begin{cases} \left]t_0 - \frac{1}{x_0}, +\infty\right[& \text{si } x_0 > 0 \\ \left]-\infty, t_0 - \frac{1}{x_0}\right[& \text{si } x_0 < 0 \\ \mathbb{R} & \text{si } x_0 = 0 \end{cases}$$

Vérifions par exemple que si $x_0 > 0$, $x(t) = \dfrac{x_0}{(t_0 - t) x_0 + 1}$ pour $t \in \left]t_0 - \frac{1}{x_0}, +\infty\right[$ est maximale.

Par l'absurde, si u est solution sur $]a, +\infty[$ avec $a < t_0 - \frac{1}{x_0}$, alors $x = u$ sur $\left]t_0 - \frac{1}{x_0}, +\infty\right[$ d'après la proposition, et par continuité de u en $t_0 - \frac{1}{x_0}$ on obtient $u\left(t_0 - \frac{1}{x_0}\right) = \lim\limits_{t \searrow t_0 - \frac{1}{x_0}} u(t) = \lim\limits_{t \searrow t_0 - \frac{1}{x_0}} x(t) = \infty$, absurde.

Preuve de la proposition

On montre que l'ensemble $A := \{t \in I_1 \cap I_2 : u(t) = v(t)\} \subset I_1 \cap I_2$ est non vide, ouvert et fermé dans $I_1 \cap I_2$, ce qui implique $A = I_1 \cap I_2$ par connexité.

- $A \neq \emptyset$ car $t_0 \in I_1 \cap I_2$
- A est fermé dans $I_1 \cap I_2$ car $A = \{t \in I_1 \cap I_2 : (u-v)(t) = 0\}$ avec u continue
- Montrons que A est ouvert dans $I_1 \cap I_2$. Soit $t_1 \in A$. Alors $t_1 \in I_1 \cap I_2$ et $u(t_1) = v(t_1) = x_1 \in \mathbb{R}^n$ et $(t_1, x_1) \in U$.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$ admet donc par Cauchy-Lipschitz une unique solution w définie sur un intervalle $[t_1-\delta, t_1+\delta]$ avec $\delta > 0$. Donc par unicité $u(t) = w(t) = v(t)$ $\forall t \in [t_1-\delta, t_1+\delta]$ et $[t_1-\delta, t_1+\delta] \subset A$. Donc A est ouvert dans $I_1 \cap I_2$.

(*) Le fait que le recollement de u et v est une solution est laissé en exercice.

Preuve du théorème

Soit I_{max} l'union de tous les intervalles contenant t_0 sur lesquels le problème de Cauchy (*) $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ admet une solution.

D'après Cauchy-Lipschitz c'est un intervalle ouvert de la forme $I_{max} =]t_-, t_+[$.
Pour tout $t \in]t_-, t_+[$, soit $u(t)$ comme la valeur en t de n'importe quelle solution de (*) définie sur $[t_0, t]$. La proposition précédente montre que c'est bien une solution:

- On a bien $u(t_0) = x_0$
- Soit $t \in]t_-, t_+[$. Vérifions que $u'(t) = f(t, u(t))$.

Par définition de $]t_-, t_+[$ il existe une solution v de (*) définie sur un intervalle I contenant t, et donc $u'(t) = f(t, u(t))$.

Par définition de $]t_-, t_+[$ il n'existe pas de solution définie sur un intervalle plus grand.

⚠ Si f est seulement continue (pas semi-lipschitzienne), on n'a plus unicité de la solution maximale

3) Durée de vie

Pour simplifier, on suppose ici $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ définie sur $U = J \times \Omega$

On s'intéresse à l'intervalle de définition d'une solution maximale.

Cet intervalle peut être différent de J (cf exemple $x'(t) = x(t)^2$ où $J = \mathbb{R}$ avec des solutions maximales non définies sur $\mathbb{R}$)

L'idée générale est que si une solution ne peut être prolongée sur tout J, c'est qu'elle s'approche en temps fini du bord de U. Formalisons cela pour t_+ (pour t_- les résultats sont similaires)

Proposition (sortie définitive de tout compact)

Soit $u :]t_-, t_+[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

avec $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}$ continue semi-lipschitzienne

Si $t_+ < \sup J$, alors pour tout compact $K \subset \Omega$, $\exists\, T \in]t_-, t_+[$ tel que $u(t) \notin K$ pour tout $t \in [T, t_+[$.

On rencontrera essentiellement les deux situations suivantes:

- $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $\|u(t)\| \xrightarrow[t \to t_+]{} +\infty$: explosion en temps fini
- $u(t)$ converge vers un point du bord de Ω quand $t \to t_+$

Preuve Soit $u :]t_-, t_+[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale (u n'est pas définie en t_+)

Par l'absurde, soit $t_n \to t_+$ et $K \subset \Omega$ compact avec $u(t_n) \in K$ $\forall n \geq 1$.

Par compacité, quitte à extraire, on peut supposer que $u(t_n) \to x_+$ avec $x_+ \in K \subset \Omega$.

En particulier, $(t_n, u(t_n)) \longrightarrow (t_+, x_+) \in J \times \Omega$.

Par Cauchy-Lipschitz, $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_+) = x_+ \end{cases}$ admet une solution sur

$]t_+ - \delta, t_+ + \delta[$, avec $\delta > 0$ pouvant être choisi de sorte que pour un voisinage V de $(t_+, x_+) \in J \times \Omega$, toute solution de

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(T) = x_T \end{cases} \quad \text{avec } (T, x_T) \in V$$

est définie sur $]T-\delta, T+\delta[$.

On choisit alors n tel que $(t_n, u(t_n)) \in V$ et tel que $t_n + \delta > t_+$

Soit alors $v :]t_n - \delta, t_n + \delta[\to \mathbb{R}^n$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_n) = u(t_n) \end{cases}$$

Le recollement de u et v définit une solution $u \oplus v$ sur $]t_-, t_n + \delta[$ qui contient strictement $]t_-, t_+[$, ce qui est absurde.

4) Solutions globales

Définition Soit $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue semi-lipschitzienne. On dit qu'une solution maximale $u : I \to \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy est globale si $I = J$.

Théorème (critère de sous-linéarité)

Soit $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue semi-lipschitzienne. On suppose que $\forall K$ compact $\subset J$, $\exists C_1, C_2 > 0$ tq

$$\forall t \in K, \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|f(t,x)\| \leq C_1 + C_2 \|x\|$$

Alors toute solution maximale est globale

(les hypothèses sont satisfaites si f est bornée)

On fait appel au lemme de Gronwall (qui sera utile de nombreuses fois):

Lemme de Gronwall Soit $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $c_0 > 0$.

① Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ continue. On suppose que

$$\forall t \in [a,b],\ y(t) \le c_0 + \int_a^t f(s)\,y(s)\,ds$$

Alors $\forall t \in [a,b]$, $y(t) \le c_0 \exp\left(\int_a^t f(s)\,ds\right)$.

② On suppose $\forall t \in [a,b]$, $y(t) \le c_0 + c\int_a^t y(s)\,ds$. avec $c > 0$.

Alors $\forall t \in [a,b]$, $y(t) \le c_0 \exp(c(t-a))$.

Preuve ② est une conséquence de ① avec $f \equiv 1$

Pour ①, posons $h(t) = c_0 + \int_a^t f(s)\,y(s)\,ds$, de sorte que $h'(t) = f(t)\,y(t)$

Comme $y(t) \le h(t)$, on obtient $h'(t) \le f(t)\,h(t)$ pour $t \in [a,b]$

Soit alors $H(t) = h(t)\exp\left(-\int_a^t f(s)\,ds\right)$.

Alors $H'(t) = \exp\left(-\int_a^t f(s)\,ds\right)\left(h'(t) - h(t)f(t)\right) \le 0$ pour $t \in [a,b]$

Ainsi H est décroissante

Or $H(a) = h(a) = c_0$. Donc $h(t) \le c_0 \exp\left(\int_a^t f(s)\,ds\right)$

Comme $y(t) \le h(t)$, on en déduit le résultat

On applique typiquement ce lemme avec la norme d'une solution (ou différence de deux solution)

Preuve du théorème

Soit $u :]t_-, t_+[\to \mathbb{R}^n$ solution maximale du problème de Cauchy. On suppose $t_+ < \sup J$. Alors par le théorème de sortie des compacts on a

$$\|u(t)\| \xrightarrow[t \to t_+]{} \infty$$

Mais $[t_0, t_+] \subset J$ est compact, donc par hypothèse $\exists C_1, C_2 > 0$
$\|f(t,x)\| \leq C_1 + C_2\|x\| \quad \forall t \in [t_0, t_+], x \in \mathbb{R}^n$.
On obtient pour tout $t \in [t_0, t_+]$:

$$\|u(t)\| \leq \|u(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s, u(s))\| \, ds$$

$$\leq \|u(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} (C_1 + C_2 \|u(s)\|) \, ds$$

$$\leq \underbrace{\|u(t_0)\| + C_1 (t_+ - t_0)}_{c_0} + C_2 \int_{t_0}^{t} \|u(s)\| \, ds$$

D'après le lemme de Gronwall, on conclut que
$$\|u(t)\| \leq c_0 \exp(C_2(t_+ - t_0)) \quad \forall t \in [t_0, t_+)$$
ce qui contredit $\|u(t)\| \xrightarrow[t \to t_+]{} +\infty$

∞