

Analyse IV 2025-2026 – Classe sino-française à l'USTC – Examen

vendredi 10 juillet 2026 – Durée : 3h

Les documents ne sont pas autorisés.

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Le résultat de toute question peut être admis et utilisé ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Le sujet comporte 3 pages.

Questions de cours.

- (1) Énoncer et démontrer les deux lemmes de Borel-Cantelli.
- (2) Énoncer la caractérisation de l'indépendance pour des vecteurs gaussiens.
- (3) Énoncer le théorème de sortie définitive de tout compact.
- (4) Énoncer le lemme de Gronwall.

Exercice 1. Pour tout $n \geq 1$, soient $B_{n,1}, \dots, B_{n,n}$ des variables de Bernoulli indépendantes telles que $\mathbb{P}(B_{n,k} = 1) = 1/n$ et $\mathbb{P}(B_{n,k} = 0) = 1 - 1/n$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Pour $n \geq 1$ on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} B_{n,k}.$$

- (1) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$ on a, en notant ϕ_{S_n} la fonction caractéristique de S_n ,

$$\phi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n} (e^{itk/n} - 1) \right).$$

- (2) Montrer que S_n converge en loi lorsque $n \rightarrow \infty$ vers $\sum_{j=1}^N U_j$, où N suit une loi de Poisson de paramètre 1 et $(U_j)_{j \geq 1}$ sont des variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$, indépendantes de N .

Exercice 2. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On considère une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ d'événements indépendants. Pour $n \geq 1$ on pose

$$a_n = \mathbb{P}(A_n), \quad b_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}.$$

On suppose que $a_1 > 0$ et que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

- (1) Montrer que la convergence $S_n/b_n \rightarrow 1$ a lieu dans L^2 lorsque $n \rightarrow \infty$.

Pour tout entier $k \geq 1$, on pose $p_k = \inf\{n \geq 1 : b_n \geq k^2\}$.

- (2) Montrer que, pour tout $k \geq 1$, p_k est bien défini, que $k^2 \leq b_{p_k} < k^2 + 1$ et que $S_{p_k}/b_{p_k} \rightarrow 1$ presque sûrement lorsque $k \rightarrow \infty$.
- (3) Soit un entier $n \in [p_k, p_{k+1}[$. En encadrant S_n/b_n à l'aide de b_{p_k} , $b_{p_{k+1}}$, S_{p_k} et $S_{p_{k+1}}$, démontrer que $S_n/b_n \rightarrow 1$ presque sûrement lorsque $n \rightarrow \infty$.

Attention. Les deux questions suivantes sont plus difficiles. Il est conseillé de ne pas passer trop de temps à les chercher pour pouvoir traiter les exercices 3 et 4 qui sont assez longs.

- (4) Soit $m \geq 2$ un entier. Démontrer que la suite $(S_n/b_n)_{n \geq 1}$ est bornée dans L^m .
- (5) Démontrer que la convergence $S_n/b_n \rightarrow 1$ a lieu dans L^p pour tout $p \geq 1$.

Remarque. On pourra utiliser l'inégalité de Hölder, qui stipule que pour tous $r, s > 1$ tels que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ on a $\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^r]^{1/r} \mathbb{E}[|Y|^s]^{1/s}$ pour des variables aléatoires réelles X, Y .

Exercice 3. Soit $d \geq 1$ un entier. On considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} x^{(d+1)}(t) = e^{x(t)}, \\ x(0) = x'(0) = \dots = x^{(d)}(0) = 0. \end{cases} \quad (A_d)$$

où $x^{(i)}$ désigne la dérivée i -ième de x .

- (1) On pose

$$X(t) = (x(t), x'(t), \dots, x^{(d)}(t)) \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Réécrire (A_d) sous la forme d'un système autonome du premier ordre $X'(t) = F(X(t))$ en explicitant F et $X(0)$. Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale définie sur un intervalle $I_{\max} = [0, T[$, avec $0 < T \leq +\infty$.

- (2) On suppose dans cette question que $d = 1$. Résoudre explicitement l'équation obtenue et déterminer $I_{\max}$.

Remarque. On pourra utiliser le fait qu'une primitive de $\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$ est $2 \arctan(\sqrt{e^x-1})$.

- (3) On revient au cas général $d \geq 1$. Le but de cette question est de montrer que $T < \infty$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $T = \infty$.

- (a) Montrer que, pour tout $t > 0$ et pour tout $0 \leq i \leq d+1$, on a $x^{(i)}(t) > 0$.
- (b) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, on a

$$x(t) \geq \frac{t^{d+1}}{(d+1)!}.$$

- (c) Pour $n \geq 0$, justifier l'existence et l'unicité de t_n tel que $x(t_n) = n$.
- (d) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) \geq e^n \frac{(t_{n+1} - t_n)^{d+1}}{(d+1)!}.$$

- (e) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} (t_{n+1} - t_n)$ converge et aboutir à une contradiction.

Exercice 4.

- (1) Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction uniformément continue telle que $\int_0^{+\infty} g(t) dt < +\infty$. Montrer que $g(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

On considère le système autonome sur $\mathbb{R}_+$

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(y(t) - 2x(t)), \\ y'(t) = y(t)(1 - x(t) - y(t)), \end{cases} \quad (S)$$

avec condition initiale

$$(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in]0, +\infty[^2.$$

On pose $w(t) = (x(t), y(t))$.

- (2) Justifier que le problème de Cauchy associé à (S) admet une unique solution maximale. Son intervalle de définition est noté $I_{\max}$.
- (3) (a) Montrer que pour tout $t \in I_{\max}$ on a $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$.
 (b) Posons $C = \max(x_0, y_0, 1)$. Montrer que pour tout $t \in I_{\max}$ on a $0 < x(t) \leq C$ et $0 < y(t) \leq C$.
 En déduire que la solution maximale est globale.
- (4) Déterminer l'unique équilibre $w_* = (x_*, y_*)$ de (S) situé dans $]0, +\infty[^2$. Étudier sa stabilité par linéarisation et donner la nature locale de l'équilibre.
- (5) On définit, pour $w = (x, y) \in]0, +\infty[^2$,

$$V(w) = x - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \ln(3x) + y - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \ln\left(\frac{3y}{2}\right).$$

- (a) Montrer que $V(w) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $w = w_*$.
- (b) Montrer que, le long d'une solution de (S),

$$\frac{d}{dt} V(w(t)) = -2 \left(x(t) - \frac{1}{3} \right)^2 - \left(y(t) - \frac{2}{3} \right)^2.$$

- (c) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \left(2 \left(x(s) - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(y(s) - \frac{2}{3} \right)^2 \right) ds < \infty$$

- (d) En déduire que

$$w(t) \longrightarrow w_* \quad \text{lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

Exercice 5. (Exercice bonus hors barème, noté sur 0 points : à ne regarder que si vous avez fait tout ce qui précède). Il s'agit de faire le lien entre les exercices 3 et 4.

On reprend les notations de l'exercice 3 avec $d = 2$. L'équation étudiée est donc $x'''(t) = e^{x(t)}$. On rappelle que x' , x'' et x''' sont strictement positives sur $]0, T[$. Par ailleurs, $x(t) \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow T^-$ (conséquence du fait que $T < \infty$ et du théorème de sortie définitive de tout compact). Pour $t \in]0, T[$, on pose

$$u_1(t) = \frac{x''(t)}{x'(t)^2}, \quad u_2(t) = \frac{x'''(t)}{x'(t)x''(t)}.$$

- (1) Montrer que pour $t \in]0, T[$ on a

$$\frac{u_1'(t)}{u_1(t)} = x'(t)(u_2(t) - 2u_1(t)), \quad \frac{u_2'(t)}{u_2(t)} = x'(t)(1 - u_1(t) - u_2(t)).$$

- (2) Soit $t_0 \in]0, T[$. On définit $\theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow [t_0, T[$ par $\theta(s) = x^{-1}(x(t_0) + s)$.

- (a) Justifier que θ est une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\theta(0) = t_0$.
- (b) Pour $s \geq 0$, on pose $\tilde{x}(s) = u_1(\theta(s))$ et $\tilde{y}(s) = u_2(\theta(s))$. Montrer que $w(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$ est solution du système (S) étudié dans l'exercice 4.

- (3) En déduire que $u_1(t) \rightarrow 1/3$ et $u_2(t) \rightarrow 2/3$ lorsque $t \rightarrow T^-$.