

Analyse IV 2025-2026 – Classe sino-française à l'USTC – Examen

vendredi 10 juillet 2026 – Durée : 3h

Les documents ne sont pas autorisés.

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Le résultat de toute question peut être admis et utilisé ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Le sujet comporte 3 pages.

Questions de cours.

- (1) Énoncer et démontrer les deux lemmes de Borel-Cantelli.
- (2) Énoncer la caractérisation de l'indépendance pour des vecteurs gaussiens.
- (3) Énoncer le théorème de sortie définitive de tout compact.
- (4) Énoncer le lemme de Gronwall.

Exercice 1. Pour tout $n \geq 1$, soient $B_{n,1}, \dots, B_{n,n}$ des variables de Bernoulli indépendantes telles que $\mathbb{P}(B_{n,k} = 1) = 1/n$ et $\mathbb{P}(B_{n,k} = 0) = 1 - 1/n$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Pour $n \geq 1$ on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} B_{n,k}.$$

- (1) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$ on a, en notant ϕ_{S_n} la fonction caractéristique de S_n ,

$$\phi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n} (e^{itk/n} - 1) \right).$$

- (2) Montrer que S_n converge en loi lorsque $n \rightarrow \infty$ vers $\sum_{j=1}^N U_j$, où N suit une loi de Poisson de paramètre 1 et $(U_j)_{j \geq 1}$ sont des variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$, indépendantes de N .

Corrigé :

- (1) Par indépendance des variables $B_{n,1}, \dots, B_{n,n}$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{S_n}(t) = \mathbb{E} \left[\exp \left(it \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} B_{n,k} \right) \right] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\exp \left(it \frac{k}{n} B_{n,k} \right) \right].$$

Or $B_{n,k}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/n$, donc

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(it \frac{k}{n} B_{n,k} \right) \right] = \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n} e^{itk/n} = 1 + \frac{1}{n} (e^{itk/n} - 1).$$

Ainsi,

$$\phi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n} (e^{itk/n} - 1) \right).$$

- (2) Fixons $t \in \mathbb{R}$ et posons $a_{n,k} = e^{itk/n} - 1$. Comme $|a_{n,k}| \leq 2$, on peut utiliser, pour n assez grand, le développement

$$\log(1+z) = z + O(|z|^2),$$

uniformément pour $|z| \leq 1/2$. On obtient alors

$$\log \phi_{S_n}(t) = \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{a_{n,k}}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{n,k} + O\left(\sum_{k=1}^n \frac{|a_{n,k}|^2}{n^2}\right).$$

Le terme d'erreur est $O(1/n)$, donc tend vers 0. Par ailleurs,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{n,k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (e^{itk/n} - 1) \longrightarrow \int_0^1 (e^{itx} - 1) dx$$

par convergence des sommes de Riemann. Donc

$$\phi_{S_n}(t) \longrightarrow \exp\left(\int_0^1 (e^{itx} - 1) dx\right).$$

Il reste à identifier cette fonction caractéristique. Soient N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre 1 et $(U_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0, 1]$, indépendante de N . On pose

$$S = \sum_{j=1}^N U_j,$$

avec la convention que la somme vaut 0 si $N = 0$.

Par la formule des probabilités totales, appliquée aux événements $\{N = m\}$, $m \geq 0$, on a

$$\phi_S(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[e^{itS} \mathbb{1}_{\{N=m\}}\right].$$

Sur l'événement $\{N = m\}$, on a $S = U_1 + \dots + U_m$, avec la convention que cette somme vaut 0 si $m = 0$. Comme N est indépendante de la suite $(U_j)_{j \geq 1}$, il vient

$$\phi_S(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = m) \mathbb{E}\left[e^{it(U_1 + \dots + U_m)}\right].$$

Par indépendance des variables U_j ,

$$\mathbb{E}\left[e^{it(U_1 + \dots + U_m)}\right] = \left(\mathbb{E}[e^{itU_1}]\right)^m.$$

Donc

$$\phi_S(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-1} \frac{1}{m!} \left(\mathbb{E}[e^{itU_1}]\right)^m = \exp\left(-1 + \mathbb{E}[e^{itU_1}]\right).$$

Or

$$\mathbb{E}[e^{itU_1}] = \int_0^1 e^{itx} dx.$$

Ainsi,

$$\phi_S(t) = \exp\left(-1 + \int_0^1 e^{itx} dx\right) = \exp\left(\int_0^1 (e^{itx} - 1) dx\right).$$

On a donc montré que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{S_n}(t) \longrightarrow \phi_S(t).$$

Par le théorème de Lévy,

$$S_n \Rightarrow S = \sum_{j=1}^N U_j.$$

□

Exercice 2. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. On considère une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ d'événements indépendants. Pour $n \geq 1$ on pose

$$a_n = \mathbb{P}(A_n), \quad b_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}.$$

On suppose que $a_1 > 0$ et que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

(1) Montrer que la convergence $S_n/b_n \rightarrow 1$ a lieu dans L^2 lorsque $n \rightarrow \infty$.

Pour tout entier $k \geq 1$, on pose $p_k = \inf\{n \geq 1 : b_n \geq k^2\}$.

(2) Montrer que, pour tout $k \geq 1$, p_k est bien défini, que $k^2 \leq b_{p_k} < k^2 + 1$ et que $S_{p_k}/b_{p_k} \rightarrow 1$ presque sûrement lorsque $k \rightarrow \infty$.

(3) Soit un entier $n \in [p_k, p_{k+1}[$. En encadrant S_n/b_n à l'aide de b_{p_k} , $b_{p_{k+1}}$, S_{p_k} et $S_{p_{k+1}}$, démontrer que $S_n/b_n \rightarrow 1$ presque sûrement lorsque $n \rightarrow \infty$.

Attention. Les deux questions suivantes sont plus difficiles. Il est conseillé de ne pas passer trop de temps à les chercher pour pouvoir traiter les exercices 3 et 4 qui sont assez longs.

(4) Soit $m \geq 2$ un entier. Démontrer que la suite $(S_n/b_n)_{n \geq 1}$ est bornée dans L^m .

(5) Démontrer que la convergence $S_n/b_n \rightarrow 1$ a lieu dans L^p pour tout $p \geq 1$.

Remarque. On pourra utiliser l'inégalité de Hölder, qui stipule que pour tous $r, s > 1$ tels que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ on a $\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^r]^{1/r} \mathbb{E}[|Y|^s]^{1/s}$ pour des variables aléatoires réelles X, Y .

Corrigé :

(1) Posons $X_k = \mathbb{1}_{A_k}$. On a $\mathbb{E}[X_k] = a_k$, donc $\mathbb{E}[S_n] = b_n$. De plus, les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, et

$$\text{Var}(X_k) = a_k(1 - a_k) \leq a_k.$$

Par indépendance,

$$\text{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k) = \sum_{k=1}^n a_k(1 - a_k) \leq b_n.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{S_n}{b_n} - 1 \right)^2 \right] = \frac{\text{Var}(S_n)}{b_n^2} \leq \frac{1}{b_n}.$$

Comme $b_n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\frac{S_n}{b_n} \longrightarrow 1 \quad \text{dans } L^2.$$

- (2) Soit $k \geq 1$. Comme $b_n \rightarrow +\infty$, l'ensemble $\{n \geq 1 : b_n \geq k^2\}$ est non vide. Donc p_k est bien défini.

Par définition de p_k , on a $b_{p_k} \geq k^2$. Si $p_k \geq 2$, alors $b_{p_k-1} < k^2$, donc

$$b_{p_k} = b_{p_k-1} + a_{p_k} < k^2 + 1,$$

puisque $a_{p_k} \leq 1$. Si $p_k = 1$, l'inégalité $b_{p_k} < k^2 + 1$ est encore vraie. Donc

$$k^2 \leq b_{p_k} < k^2 + 1.$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{S_{p_k}}{b_{p_k}} - 1 \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 b_{p_k}} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 k^2}.$$

Comme la série $\sum_{k \geq 1} 1/k^2$ converge, le lemme de Borel-Cantelli donne, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{S_{p_k}}{b_{p_k}} - 1 \right| > \varepsilon \text{ infiniment souvent} \right) = 0.$$

En appliquant ceci à $\varepsilon = 1/m$, $m \geq 1$, puis en prenant l'intersection des événements de probabilité 1 obtenus, on en déduit

$$\frac{S_{p_k}}{b_{p_k}} \longrightarrow 1 \quad \text{presque sûrement.}$$

- (3) Soit $n \in [p_k, p_{k+1}[$. Les suites (S_n) et (b_n) sont croissantes, donc

$$S_{p_k} \leq S_n \leq S_{p_{k+1}} \quad \text{et} \quad b_{p_k} \leq b_n \leq b_{p_{k+1}}.$$

Par conséquent,

$$\frac{S_{p_k}}{b_{p_{k+1}}} \leq \frac{S_n}{b_n} \leq \frac{S_{p_{k+1}}}{b_{p_k}}.$$

Or

$$\frac{S_{p_k}}{b_{p_{k+1}}} = \frac{S_{p_k}}{b_{p_k}} \frac{b_{p_k}}{b_{p_{k+1}}}, \quad \frac{S_{p_{k+1}}}{b_{p_k}} = \frac{S_{p_{k+1}}}{b_{p_{k+1}}} \frac{b_{p_{k+1}}}{b_{p_k}}.$$

D'après la question précédente,

$$\frac{S_{p_k}}{b_{p_k}} \longrightarrow 1 \quad \text{et} \quad \frac{S_{p_{k+1}}}{b_{p_{k+1}}} \longrightarrow 1 \quad \text{p.s.}$$

De plus,

$$\frac{k^2}{(k+1)^2 + 1} \leq \frac{b_{p_k}}{b_{p_{k+1}}} \leq 1$$

et

$$1 \leq \frac{b_{p_{k+1}}}{b_{p_k}} \leq \frac{(k+1)^2 + 1}{k^2}.$$

Les deux rapports $b_{p_k}/b_{p_{k+1}}$ et $b_{p_{k+1}}/b_{p_k}$ tendent donc vers 1. Par encadrement,

$$\frac{S_n}{b_n} \longrightarrow 1 \quad \text{presque sûrement.}$$

(4) Soit $m \geq 2$ un entier. Montrons que $(S_n/b_n)_{n \geq 1}$ est bornée dans L^m .

On écrit

$$S_n^m = \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} \right)^m.$$

Par la formule multinomiale,

$$S_n^m = \sum_{\substack{r_1, \dots, r_n \geq 0 \\ r_1 + \dots + r_n = m}} \binom{m}{r_1, \dots, r_n} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}^{r_i}.$$

Comme $\mathbb{1}_{A_i}^{r_i} = \mathbb{1}_{A_i}$ si $r_i \geq 1$ et $\mathbb{1}_{A_i}^0 = 1$, on obtient, par indépendance,

$$\mathbb{E}[S_n^m] = \sum_{\substack{r_1, \dots, r_n \geq 0 \\ r_1 + \dots + r_n = m}} \binom{m}{r_1, \dots, r_n} \prod_{\{i: r_i \geq 1\}} a_i.$$

On regroupe les termes selon le nombre ℓ d'indices i tels que $r_i \geq 1$. Pour $1 \leq \ell \leq m$, il existe une constante $C_{m,\ell}$ ne dépendant que de m et de ℓ telle que

$$\mathbb{E}[S_n^m] = \sum_{\ell=1}^m C_{m,\ell} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n} a_{i_1} \cdots a_{i_\ell}.$$

En particulier,

$$\mathbb{E}[S_n^m] \leq C_m \sum_{\ell=1}^m \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n} a_{i_1} \cdots a_{i_\ell}.$$

Or

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n} a_{i_1} \cdots a_{i_\ell} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^\ell = b_n^\ell.$$

Donc

$$\mathbb{E}[S_n^m] \leq C_m \sum_{\ell=1}^m b_n^\ell.$$

Comme $b_n \rightarrow +\infty$, on a $b_n \geq 1$ à partir d'un certain rang, et donc

$$\mathbb{E}[S_n^m] \leq C'_m b_n^m$$

pour n assez grand. Ainsi,

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{b_n}\right)^m\right] \leq C'_m$$

pour n assez grand. Les premiers termes étant en nombre fini, on obtient

$$\sup_n \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{b_n}\right)^m\right] < +\infty.$$

La suite $(S_n/b_n)_{n \geq 1}$ est donc bornée dans L^m .

(5) Montrons que $S_n/b_n \rightarrow 1$ dans L^p pour tout $p \geq 1$.

Si $1 \leq p \leq 2$, cela découle de la convergence dans L^2 . En effet,

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{S_n}{b_n} - 1\right|^p\right] \leq \mathbb{E}\left[\left|\frac{S_n}{b_n} - 1\right|^2\right]^{p/2} \rightarrow 0.$$

Soit maintenant $p > 2$. On choisit un entier $m > p$. D'après la question précédente, $(S_n/b_n)_n$ est bornée dans L^m . Donc

$$\sup_n \mathbb{E}\left[\left|\frac{S_n}{b_n} - 1\right|^m\right] < +\infty.$$

Posons $Y_n = S_n/b_n - 1$. On sait déjà que $Y_n \rightarrow 0$ dans L^2 . Choisissons $\theta \in (0, 1)$ tel que

$$p = 2\theta + m(1 - \theta).$$

Par l'inégalité de Hölder appliquée avec les exposants $r = 1/\theta$ et $s = 1/(1 - \theta)$,

$$\mathbb{E}[|Y_n|^p] = \mathbb{E}[(|Y_n|^2)^\theta (|Y_n|^m)^{1-\theta}] \leq \mathbb{E}[|Y_n|^2]^\theta \mathbb{E}[|Y_n|^m]^{1-\theta}.$$

Le premier facteur tend vers 0, tandis que le second est borné. Ainsi

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{S_n}{b_n} - 1\right|^p\right] \rightarrow 0.$$

Donc

$$\frac{S_n}{b_n} \rightarrow 1 \quad \text{dans } L^p$$

pour tout $p \geq 1$.

□

Exercice 3. Soit $d \geq 1$ un entier. On considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} x^{(d+1)}(t) = e^{x(t)}, \\ x(0) = x'(0) = \dots = x^{(d)}(0) = 0. \end{cases} \quad (A_d)$$

où $x^{(i)}$ désigne la dérivée i -ième de x .

(1) On pose

$$X(t) = (x(t), x'(t), \dots, x^{(d)}(t)) \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Réécrire (A_d) sous la forme d'un système autonome du premier ordre $X'(t) = F(X(t))$ en explicitant F et $X(0)$. Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale définie sur un intervalle $I_{\max} = [0, T[$, avec $0 < T \leq +\infty$.

(2) On suppose dans cette question que $d = 1$. Résoudre explicitement l'équation obtenue et déterminer $I_{\max}$.

Remarque. On pourra utiliser le fait qu'une primitive de $\frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$ est $2 \arctan(\sqrt{e^x - 1})$.

(3) On revient au cas général $d \geq 1$. Le but de cette question est de montrer que $T < \infty$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $T = \infty$.

(a) Montrer que, pour tout $t > 0$ et pour tout $0 \leq i \leq d + 1$, on a $x^{(i)}(t) > 0$.

(b) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, on a

$$x(t) \geq \frac{t^{d+1}}{(d+1)!}.$$

(c) Pour $n \geq 0$, justifier l'existence et l'unicité de t_n tel que $x(t_n) = n$.

(d) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) \geq e^n \frac{(t_{n+1} - t_n)^{d+1}}{(d+1)!}.$$

(e) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} (t_{n+1} - t_n)$ converge et aboutir à une contradiction.

Corrigé :

(1) Posons $X(t) = (X_0(t), \dots, X_d(t)) = (x(t), x'(t), \dots, x^{(d)}(t))$. Alors l'équation est équivalente au système autonome $X'(t) = F(X(t))$, avec

$$F(X_0, \dots, X_d) = (X_1, \dots, X_d, e^{X_0})$$

et $X(0) = (0, \dots, 0)$. Le champ F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{d+1}$, donc il est localement lipschitzien. Le théorème de Cauchy–Lipschitz donne ainsi l'existence et l'unicité d'une solution maximale, définie sur un intervalle $I_{\max} = [0, T[$, avec $0 < T \leq +\infty$.

(2) Lorsque $d = 1$, on a $x'' = e^x$, $x(0) = x'(0) = 0$. En multipliant par x' et en intégrant, on obtient

$$\frac{1}{2}(x'(t))^2 = e^{x(t)} - 1.$$

Comme $x'' = e^x > 0$, on a $x'(t) > 0$ pour $t > 0$, donc $x'(t) = \sqrt{2(e^{x(t)} - 1)}$. Ainsi, pour $t > 0$,

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x(t)} \frac{du}{\sqrt{e^u - 1}} = \sqrt{2} \arctan(\sqrt{e^{x(t)} - 1}).$$

On en déduit $\sqrt{e^{x(t)} - 1} = \tan(t/\sqrt{2})$, puis

$$x(t) = \ln \left(1 + \tan^2 \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right) = -2 \ln \left(\cos \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right).$$

Cette formule définit une solution sur $[0, \pi/\sqrt{2}[$, et $x(t) \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow (\pi/\sqrt{2})^-$. Donc $I_{\max} = [0, \pi/\sqrt{2}[$.

- (3) (a) On raisonne sous l'hypothèse $T = +\infty$. Comme $x^{(d+1)} = e^x > 0$, la fonction $x^{(d)}$ est strictement croissante et $x^{(d)}(0) = 0$, donc $x^{(d)}(t) > 0$ pour tout $t > 0$. En répétant l'argument, on obtient successivement $x^{(d-1)}(t) > 0, \dots, x'(t) > 0, x(t) > 0$ pour tout $t > 0$. Ainsi $x^{(i)}(t) > 0$ pour tout $0 \leq i \leq d+1$ et tout $t > 0$.

- (b) D'après (a), on a $x(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$. Par conséquent,

$$x^{(d+1)}(t) = e^{x(t)} \geq 1.$$

Nous allons effectuer des intégrations successives, en les formalisant par une récurrence. Pour $0 \leq k \leq d+1$, considérons la propriété

$$(\mathcal{P}_k) \quad \forall t \geq 0, \quad x^{(d+1-k)}(t) \geq \frac{t^k}{k!}.$$

Pour $k = 0$, cette inégalité est exactement $x^{(d+1)}(t) \geq 1$.

Supposons maintenant l'inégalité établie à un rang $k \in \{0, \dots, d\}$. Comme $x^{(d-k)}(0) = 0$ par les conditions initiales, une intégration entre 0 et t donne

$$\begin{aligned} x^{(d-k)}(t) &= x^{(d-k)}(0) + \int_0^t x^{(d+1-k)}(s) ds \\ &\geq \int_0^t \frac{s^k}{k!} ds = \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $k+1$. Par récurrence, elle est vraie jusqu'au rang $k = d+1$. Pour ce dernier rang, elle s'écrit

$$x(t) \geq \frac{t^{d+1}}{(d+1)!},$$

ce qui est le résultat voulu.

- (c) D'après (a), x est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et d'après (b), $x(t) \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Comme x est continue et $x(0) = 0$, pour tout $n \geq 0$ il existe un unique $t_n \geq 0$ tel que $x(t_n) = n$. En particulier, $t_0 = 0$.
- (d) Fixons $n \geq 0$. Comme x est croissante et que $x(t_n) = n$, on a, pour tout $t \in [t_n, t_{n+1}]$,

$$x(t) \geq n, \quad \text{donc} \quad x^{(d+1)}(t) = e^{x(t)} \geq e^n.$$

Posons, sur $[t_n, t_{n+1}]$,

$$z(t) = x(t) - x(t_n).$$

Alors $z^{(j)}(t) = x^{(j)}(t)$ pour $1 \leq j \leq d+1$, tandis que $z(t_n) = 0$. D'après (a),

$$z^{(j)}(t_n) = x^{(j)}(t_n) \geq 0 \quad (1 \leq j \leq d).$$

Nous allons de nouveau procéder par récurrence, ce qui revient à intégrer successivement l'inégalité $z^{(d+1)} \geq e^n$. Pour $0 \leq k \leq d+1$, considérons la propriété

$$(\mathcal{Q}_k) \quad \forall t \in [t_n, t_{n+1}], \quad z^{(d+1-k)}(t) \geq e^n \frac{(t-t_n)^k}{k!}.$$

Pour $k = 0$, il s'agit précisément de l'inégalité

$$z^{(d+1)}(t) = x^{(d+1)}(t) \geq e^n.$$

Supposons la propriété vraie à un rang $k \in \{0, \dots, d\}$. En intégrant entre t_n et t , et en utilisant $z^{(d-k)}(t_n) \geq 0$ (y compris lorsque $k = d$, puisque $z(t_n) = 0$), on obtient

$$\begin{aligned} z^{(d-k)}(t) &= z^{(d-k)}(t_n) + \int_{t_n}^t z^{(d+1-k)}(s) ds \\ &\geq e^n \int_{t_n}^t \frac{(s-t_n)^k}{k!} ds = e^n \frac{(t-t_n)^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $k+1$. Au rang $k = d+1$, elle donne

$$x(t) - x(t_n) = z(t) \geq e^n \frac{(t-t_n)^{d+1}}{(d+1)!}.$$

En prenant $t = t_{n+1}$, on conclut que

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) \geq e^n \frac{(t_{n+1} - t_n)^{d+1}}{(d+1)!}.$$

(e) Comme $x(t_{n+1}) - x(t_n) = 1$, la question précédente donne

$$t_{n+1} - t_n \leq ((d+1)!)^{1/(d+1)} e^{-n/(d+1)}.$$

Donc la série $\sum_{n \geq 0} (t_{n+1} - t_n)$ converge. La suite croissante (t_n) admet donc une limite finie ℓ . Mais $x(t_n) = n \rightarrow +\infty$, tandis que, sous l'hypothèse $T = +\infty$, la fonction x est continue en ℓ , donc $x(t_n) \rightarrow x(\ell) < +\infty$. Contradiction. On conclut que $T < +\infty$. □

Exercice 4.

- (1) Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction uniformément continue telle que $\int_0^{+\infty} g(t) dt < +\infty$. Montrer que $g(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

On considère le système autonome sur $\mathbb{R}_+$

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(y(t) - 2x(t)), \\ y'(t) = y(t)(1 - x(t) - y(t)), \end{cases} \quad (S)$$

avec condition initiale

$$(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in]0, +\infty[^2.$$

On pose $w(t) = (x(t), y(t))$.

- (2) Justifier que le problème de Cauchy associé à (S) admet une unique solution maximale. Son intervalle de définition est noté $I_{\max}$.
- (3) (a) Montrer que pour tout $t \in I_{\max}$ on a $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$.
 (b) Posons $C = \max(x_0, y_0, 1)$. Montrer que pour tout $t \in I_{\max}$ on a $0 < x(t) \leq C$ et $0 < y(t) \leq C$.
 En déduire que la solution maximale est globale.
- (4) Déterminer l'unique équilibre $w_* = (x_*, y_*)$ de (S) situé dans $]0, +\infty[^2$. Étudier sa stabilité par linéarisation et donner la nature locale de l'équilibre.
- (5) On définit, pour $w = (x, y) \in]0, +\infty[^2$,

$$V(w) = x - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \ln(3x) + y - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \ln\left(\frac{3y}{2}\right).$$

- (a) Montrer que $V(w) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $w = w_*$.
- (b) Montrer que, le long d'une solution de (S),

$$\frac{d}{dt} V(w(t)) = -2 \left(x(t) - \frac{1}{3} \right)^2 - \left(y(t) - \frac{2}{3} \right)^2.$$

- (c) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \left(2 \left(x(s) - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(y(s) - \frac{2}{3} \right)^2 \right) ds < \infty$$

- (d) En déduire que

$$w(t) \longrightarrow w_* \quad \text{lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

Corrigé :

- (1) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $t_n \rightarrow +\infty$ telle que $g(t_n) \geq \varepsilon$. Par uniforme continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $|t-s| \leq \delta$ implique $|g(t)-g(s)| \leq \varepsilon/2$. On peut extraire une sous-suite, encore notée (t_n) , telle que les intervalles $[t_n - \delta/2, t_n + \delta/2]$ soient deux à deux disjoints et inclus dans $\mathbb{R}_+$ à partir d'un certain rang. Sur chacun de ces intervalles, $g \geq \varepsilon/2$. L'intégrale de g sur $\mathbb{R}_+$ serait donc infinie, contradiction. Ainsi $g(t) \rightarrow 0$.
- (2) Le champ de vecteurs $F(x, y) = (x(y - 2x), y(1 - x - y))$ est polynomial, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour toute condition initiale (x_0, y_0) il existe une unique solution maximale $w(t) = (x(t), y(t))$, définie sur un intervalle $I_{\max} =]0, T[$, avec $0 < T \leq +\infty$.
- (3) (a) Tant que la solution est définie, on a

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t (y(s) - 2x(s)) ds\right), \quad y(t) = y_0 \exp\left(\int_0^t (1 - x(s) - y(s)) ds\right).$$

Comme $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$, on en déduit $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout $t \in I_{\max}$.

(b) Posons $C = \max(x_0, y_0, 1)$. On a donc $x_0 \leq C$, $y_0 \leq C$ et $C \geq 1$.

Majoration de y par un argument de première sortie. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $t_1 \in I_{\max}$ tel que $y(t_1) > C$. On définit le premier instant où y franchit strictement le niveau C par

$$\tau_y = \inf\{t \in [0, t_1] : y(t) > C\}.$$

L'ensemble considéré est non vide, puisque $y(t_1) > C$. Comme $y(0) = y_0 \leq C$ et que y est continue, on a

$$y(\tau_y) = C.$$

Plus précisément, $y(t) \leq C$ pour $t < \tau_y$, tandis qu'il existe une suite (t_m) telle que

$$t_m > \tau_y, \quad t_m \longrightarrow \tau_y, \quad y(t_m) > C = y(\tau_y).$$

Par conséquent,

$$\frac{y(t_m) - y(\tau_y)}{t_m - \tau_y} > 0.$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, la dérivabilité de y donne

$$y'(\tau_y) \geq 0.$$

Mais l'équation différentielle et la positivité de x établie en (a) donnent, puisque $C \geq 1$,

$$\begin{aligned} y'(\tau_y) &= y(\tau_y)(1 - x(\tau_y) - y(\tau_y)) \\ &= C(1 - x(\tau_y) - C) \\ &\leq -Cx(\tau_y) < 0, \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire. Ainsi,

$$y(t) \leq C \quad \text{pour tout } t \in I_{\max}.$$

Majoration de x . Supposons maintenant, toujours par l'absurde, qu'il existe $t_1 \in I_{\max}$ tel que $x(t_1) > C$, et posons

$$\tau_x = \inf\{t \in [0, t_1] : x(t) > C\}.$$

Comme précédemment, la continuité de x donne $x(\tau_x) = C$, et l'existence de temps immédiatement postérieurs à τ_x où $x > C$ implique

$$x'(\tau_x) \geq 0.$$

Or la majoration de y déjà démontrée entraîne

$$\begin{aligned} x'(\tau_x) &= x(\tau_x)(y(\tau_x) - 2x(\tau_x)) \\ &= C(y(\tau_x) - 2C) \\ &\leq C(C - 2C) = -C^2 < 0, \end{aligned}$$

nouvelle contradiction. On a donc

$$x(t) \leq C \quad \text{pour tout } t \in I_{\max}.$$

Avec (a), il vient finalement

$$0 < x(t) \leq C, \quad 0 < y(t) \leq C \quad \text{pour tout } t \in I_{\max}.$$

Écrivons $I_{\max} = [0, T[$. Le champ étant défini sur tout $\mathbb{R}^2$, si $T < +\infty$, le théorème de sortie définitive de tout compact, appliqué au compact $[0, C]^2 \subset \mathbb{R}^2$, imposerait que la trajectoire quitte ce compact lorsque t s'approche de T . Or les inégalités précédentes montrent que

$$w(t) = (x(t), y(t)) \in [0, C]^2 \quad \text{pour tout } t \in [0, T[,$$

ce qui est impossible. Par conséquent, $T = +\infty$ et la solution maximale est globale.

- (4) Dans $]0, +\infty[^2$, un équilibre vérifie $y - 2x = 0$ et $1 - x - y = 0$. On obtient donc l'unique équilibre

$$w_* = (x_*, y_*) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

La matrice jacobienne du champ est

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} y - 4x & x \\ -y & 1 - x - 2y \end{pmatrix},$$

donc

$$DF(w_*) = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Sa trace vaut $-4/3$ et son déterminant vaut $2/3$. Les valeurs propres sont

$$\lambda_{\pm} = -\frac{2}{3} \pm i \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Elles ont toutes deux une partie réelle strictement négative. Par linéarisation, w_* est localement asymptotiquement stable; c'est un foyer stable.

- (5) (a) Pour $u > 0$, on a $u - 1 - \ln u \geq 0$, avec égalité si et seulement si $u = 1$. En appliquant ceci à $u = 3x$ et à $u = 3y/2$, on obtient

$$V(x, y) = \frac{1}{3}(3x - 1 - \ln(3x)) + \frac{2}{3}\left(\frac{3y}{2} - 1 - \ln\left(\frac{3y}{2}\right)\right) \geq 0.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $3x = 1$ et $3y/2 = 1$, c'est-à-dire si et seulement si $w = w_*$.

- (b) On a $\partial_x V = 1 - 1/(3x)$ et $\partial_y V = 1 - 2/(3y)$. Le long d'une solution,

$$\frac{d}{dt} V(w(t)) = \left(x - \frac{1}{3}\right)(y - 2x) + \left(y - \frac{2}{3}\right)(1 - x - y).$$

En écrivant $a = x - 1/3$ et $b = y - 2/3$, on a $y - 2x = b - 2a$ et $1 - x - y = -a - b$. Donc

$$\frac{d}{dt}V(w(t)) = a(b - 2a) + b(-a - b) = -2a^2 - b^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}V(w(t)) = -2\left(x(t) - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(y(t) - \frac{2}{3}\right)^2.$$

(c) En intégrant l'identité précédente entre 0 et t , on obtient

$$\int_0^t \left(2\left(x(s) - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y(s) - \frac{2}{3}\right)^2\right) ds = V(w(0)) - V(w(t)) \leq V(w(0)),$$

puisque $V \geq 0$. En faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient l'intégrabilité annoncée.

(d) Posons

$$g(t) = 2\left(x(t) - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y(t) - \frac{2}{3}\right)^2.$$

D'après (c), g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. D'après (3), x et y sont bornées; comme $x' = x(y - 2x)$ et $y' = y(1 - x - y)$, les fonctions x' et y' sont aussi bornées. Il en résulte que g' est bornée, donc g est uniformément continue. Par la question (1), $g(t) \rightarrow 0$. Comme g est une somme de carrés à coefficients strictement positifs, on en déduit $x(t) \rightarrow 1/3$ et $y(t) \rightarrow 2/3$. Ainsi $w(t) \rightarrow w_*$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

□

Exercice 5. (Exercice bonus hors barème, noté sur 0 points : à ne regarder que si vous avez fait tout ce qui précède). Il s'agit de faire le lien entre les exercices 3 et 4.

On reprend les notations de l'exercice 3 avec $d = 2$. L'équation étudiée est donc $x'''(t) = e^{x(t)}$. On rappelle que x' , x'' et x''' sont strictement positives sur $]0, T[$. Par ailleurs, $x(t) \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow T^-$ (conséquence du fait que $T < \infty$ et du théorème de sortie définitive de tout compact). Pour $t \in]0, T[$, on pose

$$u_1(t) = \frac{x''(t)}{x'(t)^2}, \quad u_2(t) = \frac{x'''(t)}{x'(t)x''(t)}.$$

(1) Montrer que pour $t \in]0, T[$ on a

$$\frac{u_1'(t)}{u_1(t)} = x'(t)(u_2(t) - 2u_1(t)), \quad \frac{u_2'(t)}{u_2(t)} = x'(t)(1 - u_1(t) - u_2(t)).$$

(2) Soit $t_0 \in]0, T[$. On définit $\theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow [t_0, T[$ par $\theta(s) = x^{-1}(x(t_0) + s)$.

(a) Justifier que θ est une bijection croissante de classe C^1 et que $\theta(0) = t_0$.

(b) Pour $s \geq 0$, on pose $\tilde{x}(s) = u_1(\theta(s))$ et $\tilde{y}(s) = u_2(\theta(s))$. Montrer que $w(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$ est solution du système (S) étudié dans l'exercice 4.

(3) En déduire que $u_1(t) \rightarrow 1/3$ et $u_2(t) \rightarrow 2/3$ lorsque $t \rightarrow T^-$.

Corrigé :

- (1) On a $x''' = e^x$, donc $x'''' = x' e^x = x' x'''$. Comme x' , x'' et x''' sont strictement positives sur $]0, T[$, les quantités u_1 et u_2 sont strictement positives et on peut dériver logarithmiquement.

D'abord,

$$\frac{u_1'}{u_1} = \frac{x'''}{x''} - 2 \frac{x''}{x'}.$$

Or, par définition de u_1 et u_2 , on a $\frac{x'''}{x''} = x' u_2$ et $\frac{x''}{x'} = x' u_1$. Donc

$$\frac{u_1'}{u_1} = x'(u_2 - 2u_1).$$

De même,

$$\frac{u_2'}{u_2} = \frac{x''''}{x'''} - \frac{x''}{x'} - \frac{x'''}{x''}.$$

Comme $x'''' = x' x'''$, on a $\frac{x''''}{x'''} = x'$. De plus, $\frac{x''}{x'} = x' u_1$ et $\frac{x'''}{x''} = x' u_2$. Ainsi,

$$\frac{u_2'}{u_2} = x' - x' u_1 - x' u_2 = x'(1 - u_1 - u_2).$$

- (2) (a) Comme $x' > 0$ sur $]0, T[$, la fonction x est strictement croissante sur $[t_0, T[$. De plus, $x(t) \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow T^-$. Ainsi x induit une bijection croissante de $[t_0, T[$ sur $[x(t_0), +\infty[$.

La fonction θ définie par $\theta(s) = x^{-1}(x(t_0) + s)$ est donc une bijection croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $[t_0, T[$. Comme x est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $x' > 0$ sur $]0, T[$, le théorème de dérivation des fonctions réciproques montre que θ est de classe $\mathcal{C}^1$. Enfin,

$$\theta(0) = x^{-1}(x(t_0)) = t_0.$$

On aura aussi besoin de l'identité

$$\theta'(s) = \frac{1}{x'(\theta(s))},$$

obtenue en dérivant $x(\theta(s)) = x(t_0) + s$.

- (b) Pour $s \geq 0$, on a $\tilde{x}(s) = u_1(\theta(s))$ et $\tilde{y}(s) = u_2(\theta(s))$. Par la règle de dérivation des fonctions composées et la question (1),

$$\tilde{x}'(s) = u_1'(\theta(s))\theta'(s) = u_1(\theta(s))x'(\theta(s))\left(u_2(\theta(s)) - 2u_1(\theta(s))\right)\frac{1}{x'(\theta(s))}.$$

Donc

$$\tilde{x}'(s) = \tilde{x}(s)(\tilde{y}(s) - 2\tilde{x}(s)).$$

De même,

$$\widetilde{y}'(s) = u_2'(\theta(s))\theta'(s) = u_2(\theta(s))x'(\theta(s))(1 - u_1(\theta(s)) - u_2(\theta(s)))\frac{1}{x'(\theta(s))},$$

d'où

$$\widetilde{y}'(s) = \widetilde{y}(s)(1 - \widetilde{x}(s) - \widetilde{y}(s)).$$

Ainsi $w(s) = (\widetilde{x}(s), \widetilde{y}(s))$ est bien solution du système (S) étudié dans l'exercice 4.

- (3) Les quantités $u_1(t_0)$ et $u_2(t_0)$ sont strictement positives, donc la solution $w(s) = (u_1(\theta(s)), u_2(\theta(s)))$ du système (S) part de $]0, +\infty[^2$. D'après l'exercice 4,

$$w(s) \longrightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad \text{lorsque } s \rightarrow +\infty.$$

Or, si $t \rightarrow T^-$, alors $x(t) \rightarrow +\infty$, donc $s = x(t) - x(t_0) \rightarrow +\infty$, et $t = \theta(s)$. On en déduit

$$u_1(t) \rightarrow \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad u_2(t) \rightarrow \frac{2}{3} \quad \text{lorsque } t \rightarrow T^-.$$

Remarque. Les exercices 3, 4 et 5 sont inspirés de l'article <https://arxiv.org/abs/2502.15673>. □