Analyse IV 2023-2024 – Classe sino-française à l'USTC – Examen

vendredi 5 juillet 2024 – Durée : 3h

Les documents ne sont pas autorisés.

La précision et la clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.

Toute question peut être admise et utilisée ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Le sujet comporte 3 pages.

Questions de cours.

(1) Énoncer et démontrer les deux lemmes de Borel-Cantelli.

(2) Énoncer le théorème central limite dans $\mathbb{R}$.

(3) Énoncer la formule de Duhamel.

(4) Énoncer le lemme de Gronwall.

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. qui vérifient pour $n \geq 1$

$$\mathbb{P}(X_n = n^2 - 1) = \frac{1}{n^2}, \qquad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

(1) Est-ce que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement ? En probabilité ? Dans L^1 ? Justifiez vos réponses.

(2) On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$. Montrer que la convergence

$$\frac{S_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1$$

a lieu presque sûrement.

***

Exercice 2. Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire réelle qui vérifie $\mathbb{P}(X \geq a) = a^{-\lambda}$ pour tout $a \geq 1$.

(1) Montrer que X a une densité et en donner une expression.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. Pour $n \geq 1$ on définit

$$T_n = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n}.$$

Les 3 parties qui suivent sont indépendantes entre elles et peuvent être abordées indépendamment les unes des autres.

Partie 1.

(2) Lorsque $n \to \infty$, est-ce que T_n converge presque sûrement ? Justifiez votre réponse.

(3) Montrer que $\mathbb{E}[T_n] \to e^{1/\lambda}$ et $\mathbb{E}[T_n^2] \to e^{2/\lambda}$ lorsque $n \to \infty$.

(4) Montrer que T_n converge dans L^2 lorsque $n \to \infty$.

(5) Montrer que T_n converge dans L^1 lorsque $n \to \infty$.

Partie 2.

(6) Montrer que $\frac{\max(X_1,\ldots,X_n)}{n^{1/\lambda}}$ converge en loi lorsque $n \to \infty$.

Partie 3. Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui vérifient

$$\sqrt{n}(Z_n - a) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(loi)} \quad \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

(7) Montrer que $Z_n \to a$ en probabilité.

(8) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a avec $g'(a) \neq 0$. Montrer que

$$\sqrt{n}(g(Z_n) - g(a)) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(loi)} \quad \mathcal{N}(0, g'(a)^2 \cdot \sigma^2).$$

Indication. Avec la formule de Taylor, écrire $g(x) = g(a) + (x-a)g'(a) + (x-a)u(x)$ avec u une fonction de limite égale à 0 en a.

(9) En déduire que $\sqrt{n}(T_n - e^{1/\lambda})$ converge en loi lorsque $n \to \infty$.

***

Exercice 3. On s'intéresse à l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$x'(t) = t(x(t))^2(x(t) - t^2). \tag{E}$$

(1) Justifier que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy associé à (E) et à la condition initiale $x(0) = x_0$.

Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $t \mapsto \phi_t(x_0)$ cette solution maximale et I_{x_0} son intervalle de définition.

(2) Que se passe-t-il pour $x_0 = 0$?

(3) On suppose que $x_0 \neq 0$. Montrer que $x_0\phi_t(x_0) > 0$ pour tout $t \in I_{x_0}$.

(4) On suppose dans cette question (4) que $x_0 < 0$.

(a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+ \cap I_{x_0}$:

$$\frac{\phi_t'(x_0)}{(\phi_t(x_0))^2} \leq -t^3.$$

(b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+ \cap I_{x_0}$:

$$\phi_t(x_0)\left(1 + \frac{t^4}{4}x_0\right) \leq x_0.$$

(c) Montrer que $\sup I_{x_0} \leq (4/|x_0|)^{1/4}$.

(d) Que se passe-t-il lorsque $t \to \sup I_{x_0}$?

(5) **(Question bonus : n'abordez cette question que si vous avez fait tout le reste)**

Pour $x_0 > 0$, la solution maximale est-elle définie sur $\mathbb{R}_+$?

* * *

Exercice 4. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$x''(t) + \varepsilon(x(t)^2 - 1)x'(t) + x(t) = 0. \tag{E_ε}$$

(1) (a) Écrire l'équation différentielle (E_ε) sous la forme d'une équation différentielle autonome

$$X'(t) = F_\varepsilon(X(t)) \tag{S_ε}$$

avec $X(t) = (x(t), x'(t))$ et $F_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction qu'on précisera.

(b) Justifier que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy associé à (S_ε) et à la condition initiale $x(0) = x_0, x'(0) = y_0$ définie sur un intervalle ouvert $I_{(x_0,y_0)}$.

Dans la suite, on note $t \mapsto \phi_t(x_0, y_0)$ cette solution.

(2) Dans cette question (2) on suppose que $\varepsilon = 0$.

(a) Que deviennent (E_ε) et (S_ε) dans ce cas ? Déterminer $I_{(x_0,y_0)}$ et $t \mapsto \phi_t(x_0, y_0)$.

(b) Montrer que $(0,0)$ est un point d'équilibre stable de (S_ε) mais qu'il n'est pas asymptotiquement stable.

(3) On suppose dans cette question (3) que $\varepsilon \neq 0$.

(a) Montrer que $(0,0)$ est le seul point d'équilibre de (S_ε).

(b) Montrer que lorsque $\varepsilon < 0$ le point $(0,0)$ est localement asymptotiquement stable et que lorsque $\varepsilon > 0$ le point $(0,0)$ n'est pas stable.

(4) On suppose que $\varepsilon < 0$. On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ et on pose $V(x,y) = x^2 + y^2$. Montrer que V est une fonction de Lyapounov pour $(0,0)$ sur D, et en déduire que pour tout $(x,y) \in D$ on a $\phi_t(x) \to (0,0)$ quand $t \to \infty$.

Fin