Analyse IV 2023-2024 – Classe sino-française à l'USTC – Examen

vendredi 5 juillet 2024 – Durée : 3h

Les documents ne sont pas autorisés.

La précision et la clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.

Toute question peut être admise et utilisée ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Le sujet comporte 3 pages.

Questions de cours.

(1) Énoncer et démontrer les deux lemmes de Borel-Cantelli.

(2) Énoncer le théorème central limite dans $\mathbb{R}$.

(3) Énoncer la formule de Duhamel.

(4) Énoncer le lemme de Gronwall.

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. qui vérifient pour $n \geq 1$

$$\mathbb{P}(X_n = n^2 - 1) = \frac{1}{n^2}, \qquad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

(1) Est-ce que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement ? En probabilité ? Dans L^1 ? Justifiez vos réponses.

(2) On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$. Montrer que la convergence

$$\frac{S_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1$$

a lieu presque sûrement.

Corrigé :

(1) On a $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n = n^2 - 1) < \infty$, donc d'après le lemme de Borel-Cantelli presque sûrement $X_n = -1$ à partir d'un certain rang. On en déduit que X_n converge presque sûrement, et donc en probabilité, vers -1. Cependant on n'a pas convergence dans L^1 : si c'était le cas et que $X_n \to Y$ dans L^1, alors on aurait aussi $X_n \to Y$ en probabilité et donc $Y = -1$ p.s., et alors on aurait $\mathbb{E}[X_n] \to -1$ mais $\mathbb{E}[X_n] = \frac{n^2-1}{n^2} - (1 - 1/n^2) = 0$.

(2) C'est une conséquence du lemme de Cesaro, car $X_n \to -1$ presque sûrement. On peut aussi le voir directement : d'après la question (1), soit $m \geq 1$ un rang (aléatoire) tel que $X_n = -1$ pour $n \geq m$. On a alors

$$\frac{S_n}{n} = \frac{S_m}{n} + \frac{-(n-m)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1$$

presque sûrement.

□

***

Exercice 2. Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire réelle qui vérifie $\mathbb{P}(X \geq a) = a^{-\lambda}$ pour tout $a \geq 1$.

(1) Montrer que X a une densité et en donner une expression.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. Pour $n \geq 1$ on définit

$$T_n = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i \right)^{1/n}.$$

Les 3 parties qui suivent sont indépendantes entre elles et peuvent être abordées indépendamment les unes des autres.

Partie 1.

(2) Lorsque $n \to \infty$, est-ce que T_n converge presque sûrement ? Justifiez votre réponse.

(3) Montrer que $\mathbb{E}[T_n] \to e^{1/\lambda}$ et $\mathbb{E}[T_n^2] \to e^{2/\lambda}$ lorsque $n \to \infty$.

(4) Montrer que T_n converge dans L^2 lorsque $n \to \infty$.

(5) Montrer que T_n converge dans L^1 lorsque $n \to \infty$.

Partie 2.

(6) Montrer que $\frac{\max(X_1,\ldots,X_n)}{n^{1/\lambda}}$ converge en loi lorsque $n \to \infty$.

Partie 3. Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui vérifient

$$\sqrt{n}(Z_n - a) \quad \underset{n\to\infty}{\overset{(loi)}{\longrightarrow}} \quad \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

(7) Montrer que $Z_n \to a$ en probabilité.

(8) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a avec $g'(a) \neq 0$. Montrer que

$$\sqrt{n}(g(Z_n) - g(a)) \quad \underset{n\to\infty}{\overset{(loi)}{\longrightarrow}} \quad \mathcal{N}(0, g'(a)^2 \cdot \sigma^2).$$

Indication. Avec la formule de Taylor, écrire $g(x) = g(a) + (x-a)g'(a) + (x-a)u(x)$ avec u une fonction de limite égale à 0 en a.

(9) En déduire que $\sqrt{n}(T_n - e^{1/\lambda})$ converge en loi lorsque $n \to \infty$.

Corrigé :

(1) On remarque que la fonction de répartition de X est donnée par $\mathbb{P}(X \leq a) = 1 - a^{-\lambda}$ pour $a \geq 1$ et $\mathbb{P}(X \leq a) = 0$ pour $a < 1$. Cette fonction est C^1 par morceaux, donc X a une densité donnée par $-\mathbb{1}_{x\geq 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{-\lambda} = \mathbb{1}_{x \geq 1} \frac{\lambda}{x^{\lambda+1}}$. Alternativement, on peut voir cela en utilisant le principe de la fonction muette.

(2) Oui, T_n converge presque sûrement. On remarque que $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1$, et que $\mathbb{P}(\ln(X) \geq a) =$

$e^{-\lambda a}$ pour tout $a \geq 0$. Donc $\ln(X)$ suit une loi exponentielle de paramètre λ. Par ailleurs,

$$\ln(T_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i).$$

D'après le principe de composition, les variables aléatoires $\ln(X_1), \dots, \ln(X_n)$ sont indépendantes et suivent toutes une loi exponentielle de paramètre λ. D'après la loi forte des grands nombres, $\ln(T_n)$ converge presque sûrement vers $1/\lambda$. Par continuité de la fonction exponentielle, on déduit que T_n converge presque sûrement vers $\exp(1/\lambda)$.

(3) On écrit par indépendance :

$$\mathbb{E}[T_n] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} X_i^{1/n}\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_i^{1/n}\right] = \mathbb{E}\left[X^{1/n}\right]^n,$$

and we similarly compute $\mathbb{E}\left[X^{1/n}\right]$:

$$\mathbb{E}\left[X^{1/n}\right] = \int_1^\infty x^{1/n} \cdot \frac{\lambda}{x^{\lambda+1}} \mathrm{d}x = \frac{\lambda n}{\lambda n - 1} = 1 + \frac{1}{\lambda n - 1}$$

pour tout n vérifiant $\lambda n - 1 > 0$. Ainsi $\mathbb{E}\left[X^{1/n}\right] < \infty$ pour n assez grand et on a en utilisant $\ln(1+x) = x + o(x)$ quand $x \to 0$:

$$\mathbb{E}[T_n] = \left(1 + \frac{1}{\lambda n - 1}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{\lambda n - 1}\right)\right) = \exp\left(n\left(\frac{1}{\lambda n - 1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{\lambda} + o(1)\right).$$

Ceci implique

$$\mathbb{E}[T_n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(1/\lambda).$$

De même, on écrit

$$\mathbb{E}[T_n^2] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} X_i^{2/n}\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_i^{2/n}\right] = \mathbb{E}\left[X^{2/n}\right]^n,$$

et

$$\mathbb{E}\left[X^{2/n}\right] = \int_1^\infty x^{2/n} \cdot \frac{\lambda}{x^{\lambda+1}} \mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\lambda}{x^{\lambda - 2/n + 1}} \mathrm{d}x$$

pour tout n tel que $\lambda - 2/n > 0$. Ainsi

$$\mathbb{E}\left[X^{2/n}\right] = \frac{\lambda n}{\lambda n - 2} = 1 + \frac{2}{\lambda n - 2}$$

et comme avant

$$\mathbb{E}[T_n^2] = \left(1 + \frac{2}{\lambda n - 2}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{2}{\lambda n - 2}\right)\right) = \exp\left(n\left(\frac{2}{\lambda n - 2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(\frac{2}{\lambda} + o(1)\right)$$

qui converge vers $\exp(2/\lambda)$.

(4) On montre que $\mathbb{E}[(T_n - \exp(1/\lambda)^2)] \to 0$:

$$\mathbb{E}[(T_n - \exp(1/\lambda)^2] = \mathbb{E}[T_n^2] - 2\exp(1/\lambda)\mathbb{E}[T_n] + \exp(2/\lambda) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

car $\mathbb{E}[T_n^2] \to \exp(2/\lambda)$ et $\mathbb{E}[T_n] \to \exp(1/\lambda)$.

(5) Ceci provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\mathbb{E}[|T_n - \exp(1/\lambda)|] \le \mathbb{E}[(T_n - \exp(1/\lambda))^2]^{1/2}$ et de la question précédente.

(6) On calcule d'abord la limite simple de la fonction de répartition de $\max(X_1, \ldots, X_n)$. Tout d'abord, pour $a \le 0$ on a $\mathbb{P}\left(\max(X_1, \ldots, X_n)/n^{1/\lambda} \le a\right) = 0$. Ensuite, pour $a > 0$, par indépendance, pour tout n assez grand pour que $an^{1/\lambda} \ge 1$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max(X_1, \ldots, X_n)/n^{1/\lambda} \le a\right) &= \mathbb{P}\left(X_1 \le a, \cdots, X_n \le an^{1/\lambda}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_1 \le an^{1/\lambda}\right)^n \\
&= (1 - \mathbb{P}\left(X_1 > an^{1/\lambda}\right))^n \\
&= \left(1 - \frac{1}{(an^{1/\lambda})^\lambda}\right)^n
\end{aligned}$$

car $\mathbb{P}\left(X_1 = an^{1/\lambda}\right) = 0$. Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\max(X_1, \ldots, X_n)/n^{1/\lambda} \le a\right) = \left(1 - \frac{1}{a^\lambda n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{a^\lambda n}\right)\right) = \exp\left(n\left(-\frac{1}{a^\lambda n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

Et donc

$$\mathbb{P}\left(\max(X_1, \ldots, X_n)/n^{1/\lambda} \le a\right) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad e^{-a^{-\lambda}}.$$

On observe maintenant que $F(a) = e^{-a^{-\lambda}} \mathbb{1}_{a \ge 0}$ est la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire X. En effet, F a limite 0 en $-\infty$, limite 1 en ∞, est continue et croissante. On conclut que $\frac{\max(X_1, \ldots, X_n)}{n^{1/\lambda}}$ converge en loi vers X.

(7) Soit N une variable aléatoire $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On fixe $\varepsilon > 0$. On a

$$\mathbb{P}(|Z_n - a| \ge \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\sqrt{n}|Z_n - a| \ge \varepsilon\sqrt{n}\right).$$

On peut trouver $M > 0$ tel que $\mathbb{P}(|N| \ge M) \le \varepsilon$. Puisque la fonction de répartition de N est continue, on a

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}|Z_n - a| \ge M\right) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \mathbb{P}(|N| \ge M) \le \varepsilon.$$

Ainsi pour n assez grand

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}|Z_n - a| \ge M\right) \le 2\varepsilon.$$

Par ailleurs, pour n assez grand $\varepsilon\sqrt{n} \ge M$. Donc pour n assez grand :

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}|Z_n - a| \ge \varepsilon\sqrt{n}\right) \le \mathbb{P}\left(\sqrt{n}|Z_n - a| \ge M\right) \le 2\varepsilon,$$

ce qui implique le résultat

(8) Soit u comme dans l'indication. On écrit

$$\sqrt{n}(g(Z_n)-g(a))=\sqrt{n}(Z_n-a)g'(a)+\sqrt{n}(Z_n-a)u(Z_n).$$

Par hypothèse, $\sqrt{n}(Z_n-a)g'(a)\to g'(a)\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ en loi, et $g'(a)\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ a la même loi que $\mathcal{N}(0,g'(a)^2\cdot\sigma^2)$. Il suffit donc de démontrer que $\sqrt{n}(Z_n-a)u(Z_n)\to 0$ en probabilité, et le résultat désiré découlera du principle des lois accompagnantes.

Pour cela, il suffit de démontrer que $u(Z_n)\to 0$ en probabilité. En effet, on aura alors $(\sqrt{n}(Z_n-a),u(Z_n))\to(\mathcal{N}(0,\sigma^2),0)$ en loi, et donc par continuité du produit $\sqrt{n}(Z_n-a)u(Z_n)\to 0$ en loi et donc en probabilité, car la convergence en probabilité vers une constante est équivalente à la convergence en loi.

Pour motrer que $u(Z_n)\to 0$ en probabilité on peut procéder de différentes manières.

Possibilité 1. Soient $\varepsilon,\eta>0$. Soit $\delta>0$ tel que $|u(x)|\leq\varepsilon$ pour $|x-a|\leq\delta$. Par convergence en probabilité de Z_n vers a, soit $N>0$ tel que pour $n\geq N$ on a $\mathbb{P}(|Z_n-a|>\delta)\leq\eta$. Alors pour $n\geq N$:

$$\mathbb{P}(|u(Z_n)|>\varepsilon)\leq\mathbb{P}(|Z_n-a|>\delta)\leq\eta.$$

Possibilité 2. On utilise le lemme des sous-suites : on montre que $u(Z_n)\to 0$ en probabilité en montrant que pour toute sous-suite ϕ il existe une sous-suite ψ telle que $u(Z_{\phi(\psi(n))})\to 0$ presque sûrement. Pour cela, on observe que puisque $Z_{\phi(n)}$ converge en probabilité vers a, il existe une sous-suite ψ telle que $Z_{\phi(\psi(n))}$ converge presque sûrement vers a. Puisque $\lim_{x\to a}u(x)=0$, cela implique que $u(Z_{\phi(\psi(n))})\to 0$ presque sûrement.

(9) On remarque que

$$T_n=\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\right),$$

et les variables aléatoires $(X_i)_{i\geq 1}$ sont i.i.d. exponentielles de paramètre λ. En posant

$$Z_n=\sum_{i=1}^{n}\ln X_i,$$

d'après le théorème central limite on a donc

$$\sqrt{n}\left(Z_n-\frac{1}{\lambda}\right)\quad\xrightarrow[n\to\infty]{(loi)}\quad\mathcal{N}\left(0,\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

On utilise la question précédente avec $g(x)=e^x$ et $a=1/\lambda$, et on obtient :

$$\sqrt{n}(T_n-e^{1/\lambda})\quad\xrightarrow[n\to\infty]{(loi)}\quad\mathcal{N}\left(0,\frac{e^{2/\lambda}}{\lambda^2}\right).$$

□

***

Exercice 3. On s'intéresse à l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$x'(t)=t(x(t))^2(x(t)-t^2).\tag{E}$$

(1) Justifier que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy associé à (E) et à la condition initiale $x(0) = x_0$.

Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $t \mapsto \phi_t(x_0)$ cette solution maximale et I_{x_0} son intervalle de définition.

(2) Que se passe-t-il pour $x_0 = 0$?

(3) On suppose que $x_0 \neq 0$. Montrer que $x_0 \phi_t(x_0) > 0$ pour tout $t \in I_{x_0}$.

(4) On suppose dans cette question (4) que $x_0 < 0$.

(a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+ \cap I_{x_0}$:

$$\frac{\phi_t'(x_0)}{(\phi_t(x_0))^2} \leq -t^3.$$

(b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+ \cap I_{x_0}$:

$$\phi_t(x_0)\left(1 + \frac{t^4}{4} x_0\right) \leq x_0.$$

(c) Montrer que $\sup I_{x_0} \leq (4/|x_0|)^{1/4}$.

(d) Que se passe-t-il lorsque $t \to \sup I_{x_0}$?

(5) **(Question bonus : n'abordez cette question que si vous avez fait tout le reste)**

Pour $x_0 > 0$, la solution maximale est-elle définie sur $\mathbb{R}_+$?

Corrigé :

(1) L'équation (E) s'écrit $x' = f(t,x)$ avec $f(t,x) = tx^2(x^2 - t^2)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Le résultat en découle d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.

(2) Dans ce cas la solution nulle est solution, c'est donc l'unique solution.

(3) L'application $h(t) = x_0 \phi_t(x_0)$ est continue sur I_{x_0} et vérifie $h(0) = x_0^2 > 0$. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $t \in I_{x_0}$ tel que $h(t) \leq 0$. Par continuité et théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in I_{x_0}$ tel que $h(t_0) = 0$ et donc $\phi_{t_0}(x_0) = 0$. Or la fonction nulle est solution de (E) avec la condition initiale $x(t_0) = 0$. Par unicité du théorème de Cauchy Lipschitz, on en déduite que $\phi_t(x_0) = 0$ pour tout $t \in I_{x_0}$. Donc $x_0 = \phi_0(x_0) = 0$, absurde.

(4) (a) D'après la question (3) on a $\phi_t(x_0) < 0$ pour tout $t \in I_{x_0}$. On écrit :

$$\frac{\phi_t'(x_0)}{(\phi_t(x_0))^2} = t(\phi_t(x_0) - t^2) < -t^3.$$

(b) On intègre l'inégalité de (a) entre 0 et $t \in \mathbb{R}_+ \cap I_{x_0}$:

$$-\frac{t^4}{4} = -\int_0^t s^3 \mathrm{d}s \geq \int_0^t \frac{\phi_s'(x_0)}{(\phi_s(x_0))^2} \mathrm{d}s = \left[-\frac{1}{\phi_s(x_0)}\right]_0^t = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{\phi_t(x_0)}.$$

Le résultat désiré en découle (en utilisant le fait que $x_0 < 0$ et $\phi_t(x_0) < 0$ dans les manipulations des inégalités.

(c) Raisonnons par l'absurde en supposant $\sup I_{x_0} > (4/|x_0|)^{1/4}$. Alors en prenant $t = (4/|x_0|)^{1/4}$ dans l'inégalité de (b) on obtient $x_0 \geq 0$, absurde.

(d) D'après le théorème de sortie définitive de tout compact, $\phi_t(x_0) \to -\infty$ lorsque $t \to \sup I_{x_0}$.

(5) Pour de grandes valeurs de x_0 la solution maximale n'est pas définie sur $\mathbb{R}_+$. Pour le voir, on remarque que si g est une fonction vérifiant $g(0) = x_0$ et $g'(t) < tg(t)^2(g(t) - t^2)$ pour tout $t \in]0, a[$, alors $g(t) \leq \phi_t(x_0)$ pour tout $t \in [0, a[\cap I_{x_0}$. Lorsque $x_0 > \sqrt{2}$ on peut prendre $g(t) = x_0/(1 - t^2)$ pour $t \in [0, 1[$ ce qui montre que $\sup I_{x_0} < 1$.

Pour de petites valeurs de x_0 la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}_+$. En effet, pour $x_0, C > 0$ qu'on va choisir plus tard, posons

$$T = \inf\left\{ t \geq 0 : \int_0^t \frac{s}{\frac{1}{x_0} + \frac{s^4}{4} - C} \mathrm{d}s \geq C \right\}.$$

Vérifons que pour tout $0 \leq t \leq T$ on a

$$\int_0^t s x(s) \mathrm{d}s \leq C.$$

Par l'absurde, soit $0 \leq t_0 \leq T$ tel que

$$\int_0^{t_0} s x(s) \mathrm{d}s = C \qquad \text{et} \qquad \int_0^t s x(s) \mathrm{d}s < C \quad \text{pour } t \in [0, t_0[. \tag{1}$$

En intégrant l'égalité

$$\frac{x'(s)}{x(s)^2} = s x(s) - s^3$$

entre 0 et t avec $t \leq t_0$ on obtient

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} + \frac{t^4}{4} = \int_0^t s x(s) \mathrm{d}s \leq C$$

avec inégalité stricte pour $t < t_0$. Ainsi

$$x(t) \leq \frac{1}{\frac{1}{x_0} - \frac{t^4}{4} - C}$$

avec inégalité stricte pour $t < t_0$. Ainsi par définition de T

$$\int_0^{t_0} s x(s) \mathrm{d}s < \int_0^{t_0} \frac{s}{\frac{1}{x_0} + \frac{s^4}{4} - C} \mathrm{d}s \leq C$$

ce qui contredit (1).

Pour avoir une solution maximale définie sur $\mathbb{R}_+$ il suffit donc d'avoir

$$\int_0^\infty \frac{s}{\frac{1}{x_0}+\frac{s^4}{4}-C}\mathrm{d}s \leq C.$$

Or pour $x_0C<1$ une primitive de $\frac{s}{\frac{1}{x_0}+\frac{s^4}{4}-C}$ est $\sqrt{\frac{x_0}{1-Cx_0}}\arctan\left(\frac{s^2\sqrt{x_0}}{2\sqrt{1-Cx_0}}\right)$, de sorte que

$$\int_0^\infty \frac{s}{\frac{1}{x_0}+\frac{s^4}{4}-C}\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x_0}{1-Cx_0}}.$$

Une étude de fonction montre que

$$\sup_{C\geq 0}\left(C-\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x_0}{1-Cx_0}}\right)\geq 0$$

si et seulement si $x_0 \leq \frac{2^{4/3}}{3\pi^{2/3}} \simeq 0.39$. Ainsi la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}_+$ pour $x_0 \in [0, \frac{2^{4/3}}{3\pi^{2/3}}[$ (on prend alors $C = \frac{4-(2\pi)^{2/3}x_0}{4x_0}$ et on a bien $Cx_0<1$).

□

* * *

Exercice 4. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$x''(t)+\varepsilon(x(t)^2-1)x'(t)+x(t)=0. \tag{E_ε}$$

(1) (a) Écrire l'équation différentielle (E_ε) sous la forme d'une équation différentielle autonome

$$X'(t)=F_\varepsilon(X(t)) \tag{S_ε}$$

avec $X(t)=(x(t),x'(t))$ et $F_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction qu'on précisera.

(b) Justifier que pour tout $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy associé à (S_ε) et à la condition initiale $x(0)=x_0, x'(0)=y_0$ définie sur un intervalle ouvert $I_{(x_0,y_0)}$.
Dans la suite, on note $t\mapsto \phi_t(x_0,y_0)$ cette solution.

(2) Dans cette question (2) on suppose que $\varepsilon=0$.

(a) Que deviennent (E_ε) et (S_ε) dans ce cas ? Déterminer $I_{(x_0,y_0)}$ et $t\mapsto\phi_t(x_0,y_0)$.

(b) Montrer que $(0,0)$ est un point d'équilibre stable de (S_ε) mais qu'il n'est pas asymptotiquement stable.

(3) On suppose dans cette question (3) que $\varepsilon\neq 0$.

(a) Montrer que $(0,0)$ est le seul point d'équilibre de (S_ε).

(b) Montrer que lorsque $\varepsilon<0$ le point $(0,0)$ est localement asymptotiquement stable et que lorsque $\varepsilon>0$ le point $(0,0)$ n'est pas stable.

(4) On suppose que $\varepsilon<0$. On note $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$ et on pose $V(x,y)=x^2+y^2$. Montrer que V est une fonction de Lyapounov pour $(0,0)$ sur D, et en déduire que pour tout $(x,y)\in D$ on a $\phi_t(x)\to(0,0)$ quand $t\to\infty$.

Corrigé :

(1) (a) On a
$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x' \\ -x-\varepsilon(x^2-1)x' \end{pmatrix}$$
et on en déduit le résultat avec $F_\varepsilon(u,v) = (v, -u-\varepsilon(u^2-1)v)$.

(b) Ceci provient du théorème de Cauchy-Lipschitz compte tenu du fait que F_ε est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

(2) (a) Dans ce cas (E_ε) est une équation linéaire d'ordre 2 : $x''(t)+x(t)=0$ et (S_ε) devient
$$X'(t) = AX(t) \qquad \text{avec} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, les solutions maximales sont globales, et on sait que les solutions de l'équation différentielle précédente sont de la forme
$$X(t) = \exp(At)X(0) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} X(0).$$
Ainsi, $\phi_t(x_0,y_0) = x_0\cos(t)+y_0\sin(t)$.

(b) Clairement si $\varepsilon>0$, si $\|(x_0,y_0)\|_2<\varepsilon$, alors $\|\phi_t(x_0,y_0)\|_2 \leq \varepsilon$ pour tout $t\geq 0$, donc $(0,0)$ est asymptotiquement stable, et il n'est pas localement asymptotiquement stable car $\phi_t(x_0,y_0) \not\to 0$ lorsque $t\to\infty$ pour $(x_0,y_0)\neq(0,0)$.

(3) (a) Ceci provient du fait que $F(u,v)=0$ implique $u=v=0$.

(b) On calcule la matrice jacobienne DF_ε en $(0,0)$:
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(0,0) & \frac{\partial F_2}{\partial u}(0,0) \\ \frac{\partial F_1}{\partial v}(0,0) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$
Les valeurs propres de cette matrice sont racines du polynôme caractéristique $X^2-\varepsilon X+1 = (X-\varepsilon/2)^2+1-\varepsilon^2/4$. Pour $|\varepsilon|\leq 2$, les deux racines complexes sont $\frac{\varepsilon}{2}\pm\sqrt{1-\varepsilon^2/4}\cdot i$ de parties réelles $\varepsilon/2$. Pour $|\varepsilon|>2$ les deux racines réelles sont $\frac{\varepsilon}{2}\pm\sqrt{\varepsilon^2/4-1}$, strictement positives si $\varepsilon>0$ et strictement négatives si $\varepsilon<0$. Le résultat désiré en découle du théorème de stabilité et d'instabilité de Lyapounov.

(4) L est différentiable sur $D\backslash\{(0,0)\}$, et on a $L(0,0)=0$ et $L>0$ sur $D\backslash\{(0,0)\}$. Pour $(x,y)\in D$ on calcule :
$$\langle \nabla L(x,y), F_\varepsilon(x,y)\rangle = \langle (2x,2y),(y,-x-\varepsilon(x^2-1)y)\rangle = 2xy-2xy+\varepsilon(x^2-1)y^2 = \varepsilon(x^2-1)y^2 < 0.$$
Ainsi L est une fonction de Lyapounov stricte, ce qui implique le résultat désiré.

□

Fin