Analyse IV 2022-2023 – Classe sino-française à l'USTC – Examen

vendredi 14 juillet 2023 – Durée : 3h

Les documents ne sont pas autorisés.

La précision et la clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.

Toute question peut être admise et utilisée ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Le sujet comporte 3 pages.

Questions de cours.

(1) Énoncer les deux lemmes de Borel-Cantelli.

(2) Énoncer la loi forte des grands nombres.

(3) Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz (existence et unicité locales).

(4) Énoncer et démontrer le lemme de Gronwall.

* * *

Exercice 1. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[0,1]$. Pour $n \geq 1$ on pose $Y_n = (U_n)^n$.

(1) Déterminer la densité de Y_n et calculer sa fonction de répartition.

(2) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 en probabilité.

(3) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge dans L^1.

(4) Montrer que presque sûrement la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ diverge.

* * *

Exercice 2. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[0,1]$. Pour $n \geq 1$ on pose :

$$M_n = \max\left(\frac{1}{\sqrt{U_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{U_n}}\right).$$

(1) Calculer la fonction de répartition de M_n.

(2) Pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ démontrer que $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq u)\,\mathrm{d}u$.

(3) Soit $p > 0$. Déterminer les valeurs de p telles que M_n a un moment d'ordre p fini.

(4) Montrer que $M_n/\sqrt{n}$ converge en loi lorsque $n \to \infty$.

* * *

Exercice 3. On s'intéresse au système

$$(S) \qquad \begin{cases} x'(t) = y(t) + e^{-t} \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases}$$

(1) Tracer le portrait de phase du système homogène linéaire associé (S_0). On indiquera les orbites remarquables.

(2) Déterminer la solution maximale de (S) de condition initiale $(1,0)$ en $t=0$.

***

Exercice 4. Soit $\varepsilon \in [0,1/3[$. On considère l'équation différentielle

$$(E_\varepsilon) \qquad x'(t) = x(t) + x(t)^2 + \varepsilon x(t)^3.$$

Soit $v > 0$.

(1) Justifier l'existence d'une solution maximale $x_\varepsilon : [0, T_\varepsilon[\to \mathbb{R}$ avec $T_\varepsilon > 0$ de (E_ε) de condition initiale $x_\varepsilon(0) = v$.

(2) Calculer T_0 en fonction de v.

Indication. On pourra trouver une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z+z^2}$.

(3) Démontrer que $T_\varepsilon < \infty$.

Dans la suite, l'objectif est de minorer T_ε indépendamment de ε. On pose

$$I_\varepsilon = \left\{ t \in [0, T_\varepsilon[: \int_0^t \varepsilon (x_\varepsilon(s))^2 \mathrm{d}s < \ln 2 \right\}.$$

(4) Montrer qu'il existe $a_\varepsilon > 0$ tel que $I_\varepsilon = [0, a_\epsilon[$.

(5) Montrer que pour tout $t \in I_\varepsilon$ on a

$$0 < x_\varepsilon(t) e^{-t} \leq 2v \exp\left(\int_0^t x_\varepsilon(s) \mathrm{d}s \right).$$

On fixe maintenant $T \in]0, \ln(1 + 1/(2v))[$.

(6) Montrer que pour tout $0 \leq t < \min(T, a_\varepsilon)$ on a

$$x_\varepsilon(t) \leq \frac{2ve^t}{1 - 2v(e^t - 1)}.$$

(7) En déduire qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ on a $T_\varepsilon > T$.

***

Problème 5.

Première partie. Soit $(E_i)_{i \geq 1}$ des variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètre 1. On pose $S_0 = 0$ et $S_i = E_1 + \cdots + E_i$ pour $i \geq 1$.

(1) Justifier que S_n/n converge presque sûrement vers 1 lorsque $n \to \infty$.

Pour $t \geq 0$, on note $i(t) \geq 0$ l'unique entier tel que $S_{i(t)} \leq t < S_{i(t)+1}$ et on pose

$$P(t) = S_{i(t)}.$$

(2) Montrer que presque sûrement $i(t) \to \infty$ quand $t \to \infty$.

(3) Montrer que

$$\frac{P(t)}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} 1$$

(4) Montrer que pour tout $C \geq 0$,

$$\sup_{0\leq u\leq C} \left| \frac{P(un)}{n} - u \right| \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$$

Deuxième partie. Soient $T > 0$, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction lipschitzienne et $z_0 \in \mathbb{R}$.

(5) Justifier que l'équation différentielle $z'(t) = \beta(z(t))$ avec $z(0) = z_0$ admet une unique solution sur $[0, T]$, qui sera notée z dans la suite.

Pour $n \geq 1$, on fixe $Z_n(0) \in \mathbb{R}$ et on suppose que $(Z_n(t))_{0\leq t\leq T}$ vérifie pour tout $0 \leq t \leq T$:

$$Z_n(t) = Z_n(0) + P\left(n \int_0^t \beta\left(\frac{Z_n(s)}{n}\right) \mathrm{d}s\right),$$

où P a été défini dans la première partie. On pose $\hat{P}(t) = P(t) - t$ et $\bar{Z}_n(t) = Z_n(t)/n$.

On suppose que $Z_n(0)/n \to z_0$ lorsque $n \to \infty$.

(6) Démontrer que presque sûrement, il existe $K > 0$ tel que $|\bar{Z}_n(t)| \leq K$ pour tout $0 \leq t \leq T$.

Indication. On pourra utiliser le lemme de Gronwall.

(7) Démontrer que presque sûrement il existe $M > 0$ et $L > 0$ tels que pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$|\bar{Z}_n(t) - z(t)| \leq |\bar{Z}_n(0) - z_0| + \sup_{0\leq s\leq t} \frac{1}{n} |\hat{P}(nMs)| + L \int_0^t |\bar{Z}_n(s) - z(s)| \mathrm{d}s.$$

(8) En déduire que

$$\sup_{0\leq t\leq T} |\bar{Z}_n(t) - z(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$$

Question bonus. (N'abordez cette question que si vous avez fait tout le reste)

(9) Est-il vrai que

$$\sup_{u\geq 0} \left| \frac{P(un)}{n} - u \right| \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0?$$

Justifiez votre réponse.

Fin