# Analyse IV 2022-2023 – Classe sino-française à l'USTC – Examen

vendredi 14 juillet 2023 – Durée : 3h

*Les documents ne sont pas autorisés.*

*La précision et la clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*

*Toute question peut être admise et utilisée ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.*

*Le sujet comporte 3 pages.*

## *Questions de cours.*

(1) Énoncer les deux lemmes de Borel-Cantelli.

(2) Énoncer la loi forte des grands nombres.

(3) Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz (existence et unicité locales).

(4) Énoncer et démontrer le lemme de Gronwall.

* * *

*Exercice 1.* Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[0,1]$. Pour $n \geq 1$ on pose $Y_n = (U_n)^n$.

(1) Déterminer la densité de $Y_n$ et calculer sa fonction de répartition.

(2) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 en probabilité.

(3) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge dans $L^1$.

(4) Montrer que presque sûrement la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ diverge.

**Corrigé :**

(1) Pour $x < 0$ on a $\mathbb{P}(Y_n \leq x) = 0$, pour $x \geq 1$ on a $\mathbb{P}(Y_n \leq x) = 1$. Pour $0 \leq x \leq 1$ on a $\mathbb{P}(Y_n \leq x) = \mathbb{P}\left(U_n \leq x^{1/n}\right) = x^{1/n}$, qui est $C^1$. On en déduit en particulier qu'une densité de $Y_n$ est $\frac{x^{1/n-1}}{n}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathrm{d}x$.

(2) Pour $\varepsilon \in ]0,1[$, $\mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon) = 1 - \varepsilon^{1/n} \longrightarrow 0$ lorsque $n \to \infty$.

(3) On a

$$\mathbb{E}[|Y_n|] = \int_0^1 x\frac{x^{1/n-1}}{n}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^1 x^{1/n}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\frac{1}{1+1/n} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Ainsi $Y_n$ converge dans $L^1$ vers 0.

(4) Soit $\varepsilon \in ]0,1[$. Pour $n \geq 1$ on a

$$\mathbb{P}(Y \geq \varepsilon) = 1 - \varepsilon^{1/n} = 1 - \exp\left(\frac{1}{n}\ln(\varepsilon)\right) \quad \underset{n\to\infty}{\sim} \quad -\frac{1}{n}\ln(\varepsilon),$$

de sorte que

$$\sum_{n\geq} \mathbb{P}(Y_n \geq \varepsilon) = \infty.$$

Comme les événements $\{Y_n \geq \varepsilon\}$ sont indépendants, par Borel-Cantelli presque sûrement $Y_n \geq \varepsilon$ une infinité de fois. D'autre part, comme $Y_n$ converge en probabilité vers 0, elle admet une sous-suite qui converge presque sûrement vers 0. Ceci démontre que p.s. $(Y_n)$ diverge. □

* * *

*Exercice 2.* Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[0,1]$. Pour $n \geq 1$ on pose :

$$M_n = \max\left(\frac{1}{\sqrt{U_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{U_n}}\right).$$

(1) Calculer la fonction de répartition de $M_n$.

(2) Pour une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ démontrer que $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq u)\mathrm{d}u$.

(3) Soit $p > 0$. Déterminer les valeurs de $p$ telles que $M_n$ a un moment d'ordre $p$ fini.

(4) Montrer que $M_n/\sqrt{n}$ converge en loi lorsque $n \to \infty$.

**Corrigé :**

(1) Pour $x < 1$ on a $\mathbb{P}(M_n \leq x) = 0$. Pour $x \geq 1$ on a :

$$\mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{U_1}} \leq\right)^n = \mathbb{P}\left(U_1 \geq \frac{1}{x^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^n.$$

(2) On a en utilisant le théorème de Fubini pour des fonctions positives :

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty 1_{u\leq X}\mathrm{d}u\right] = \int_0^\infty \mathbb{E}[1_{u\leq X}]\mathrm{d}u = \int_1^\infty \mathbb{P}(X \geq u)\mathrm{d}u.$$

(3) On a

$$\mathbb{E}\left[M_n^p\right] = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(M_n^p \geq u\right)\mathrm{d}u = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(M_n \geq u^{1/p}\right)\mathrm{d}u.$$

Mais pour $u \geq 1$ :

$$\mathbb{P}\left(M_n \geq u^{1/p}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(M_n < u^{1/p}\right) = \left(1 - \frac{1}{u^{2/p}}\right)^n \quad \underset{u\to\infty}{\sim} \quad \frac{n}{u^{2/p}}.$$

Donc $\mathbb{E}\left[M_n^p\right] < \infty$ si et seulement si $p < 2$.

(4) On passe par les fonctions de répartition. Pour $x \leq 0$, on a $\mathbb{P}\left(M_n/\sqrt{n} \leq x\right) = 0$. Pour $x > 0$, on a, à partir d'un certain rang tel que $x\sqrt{n} \geq 1$ :

$$\mathbb{P}\left(M_n/\sqrt{n} \leq x\right) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad e^{-1/x^2}.$$

On pose $F(x) = e^{-1/x^2}1_{x>0}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors $F$ est continue croissante et tend vers 0 en $-\infty$ et en 1 en $+\infty$, c'est donc la fonction de répartition d'une variable aléatoire $Z$, et donc $M_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers $Z$. □

***

*Exercice 3.* On s'intéresse au système

$$(S) \quad \begin{cases} x'(t) = y(t) + e^{-t} \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases}$$

(1) Tracer le portrait de phase du système homogène linéaire associé $(S_0)$. On indiquera les orbites remarquables.

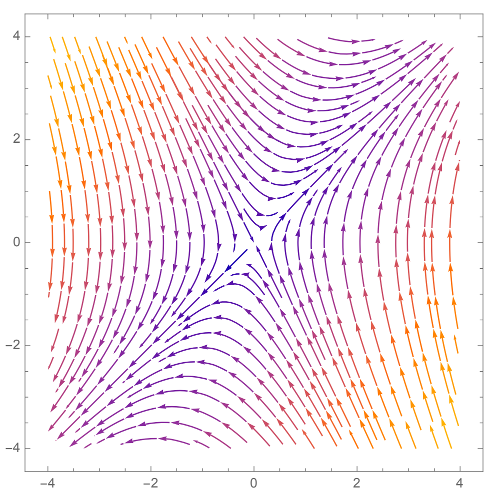
(2) Déterminer la solution maximale de $(S)$ de condition initiale $(1, 0)$ en $t = 0$.

**Corrigé :**

(1) Le système homogène linéaire associée est

$$(S_0) \quad \begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases}$$

qui s'écrit $X'(t) = AX(t)$ avec $X(t) = (x(t), y(t))$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont $-2$ et $1$. les orbites remarquables sont portées par les axes propres, respectivement dirigées par les vecteurs $v_{-2} = (1, -2)$ et $v_1 = (1, 1)$.




(2) On trouve, par exemple en utilisant la méthode de variation de la constante en cherchant une solution sous la forme $x(t) = a(t)e^{-2t}v_2 + b(t)e^t v_1$, la solution $x(t) = e^t, y(t) = e^t - e^{-t}$. □

***

*Exercice 4.* Soit $\varepsilon \in [0, 1/3[$. On considère l'équation différentielle

$$(E_\varepsilon) \qquad x'(t) = x(t) + x(t)^2 + \varepsilon x(t)^3.$$

Soit $v > 0$.

(1) Justifier l'existence d'une solution maximale $x_\varepsilon : [0, T_\varepsilon[ \to \mathbb{R}$ avec $T_\varepsilon > 0$ de $(E_\varepsilon)$ de condition initiale $x_\varepsilon(0) = v$.

(2) Calculer $T_0$ en fonction de $v$.

*Indication.* On pourra trouver une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z+z^2}$.

(3) Démontrer que $T_\varepsilon < \infty$.

Dans la suite, l'objectif est de minorer $T_\varepsilon$ indépendamment de $\varepsilon$. On pose

$$I_\varepsilon = \left\{ t \in [0, T_\varepsilon[ : \int_0^t \varepsilon (x_\varepsilon(s))^2 \mathrm{d}s < \ln 2 \right\}.$$

(4) Montrer qu'il existe $a_\varepsilon > 0$ tel que $I_\varepsilon = [0, a_\epsilon[$.

(5) Montrer que pour tout $t \in I_\varepsilon$ on a

$$0 < x_\varepsilon(t) e^{-t} \leq 2v \exp\left( \int_0^t x_\varepsilon(s) \mathrm{d}s \right).$$

On fixe maintenant $T \in ]0, \ln(1 + 1/(2v))[$.

(6) Montrer que pour tout $0 \leq t < \min(T, a_\varepsilon)$ on a

$$x_\varepsilon(t) \leq \frac{2ve^t}{1 - 2v(e^t - 1)}.$$

(7) En déduire qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ on a $T_\varepsilon > T$.

**Corrigé :**

(1) La fonction $F(x) = x + x^2 + \varepsilon x^3$ étant $C^1$ sur $\mathbb{R}$, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une solution maximale valant $v$ en $0$ définie sur un ouvert contenant $0$, d'où le résultat. Remarquons déjà que les solutions de $(E_\varepsilon)$ ne s'annulent pas : la fonction constante nulle étant solution, d'après l'unicité de Cauchy-Lipschitz les autres solutions ne s'annulent pas. En particulier, toute solution reste strictement positive.

(2) On remarque que $x_0'(t) = x_0(t) + x_0(t)^2$ est équivalent à $\frac{x_0'(t)}{x_0(t)+x_0(t)^2} = 1$, ce qui est équivalent à $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln(x_0(t)/(1 + x_0(t)) = 1$. La solution est donc

$$x_0(t) = \frac{ve^t}{1 + v - ve^t},$$

de sorte que $T_0 = \ln(1 + 1/v)$.

(3) On a $x_\varepsilon'(t) \geq x_\varepsilon(t) + x_\varepsilon(t)^2$, donc $\frac{x_\varepsilon'(t)}{x_\varepsilon(t)+x_\varepsilon(t)^2} \geq 1$. En intégrant on obtient

$$x_\varepsilon(t) \geq \frac{ve^t}{1 + v - ve^t},$$

et donc $T_\varepsilon \leq T_0$.

(4) Ceci provient du fait que $t \mapsto \int_0^t \varepsilon (x_\varepsilon(s))^2 \mathrm{d}s$ est une fonction continue strictement croissante sur $[0, T_\varepsilon[$.

(5) On a
$$\frac{x_\varepsilon'(t)}{x_\varepsilon(t)} = 1 + x_\varepsilon(t) + \varepsilon x_\varepsilon(t)^2.$$
En intégrant on obtient,
$$\ln\left(\frac{x_\varepsilon(t)}{v}\right) = t + \int_0^t x_\varepsilon(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \varepsilon x_\varepsilon(s)^2\mathrm{d}s \le t + \int_0^t x_\varepsilon(s)\mathrm{d}s + \ln(2),$$
d'où le résultat.

(6) On remarque que l'inégalité est stricte pour $t = 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $0 < t_0 < \min(T, a_{\varepsilon)}$ tel que
$$x_\varepsilon(t_0) = \frac{2ve^{t_0}}{1 - 2v(e^{t_0} - 1)}.$$
Alors
$$\int_0^{t_0} x_\varepsilon(s)\mathrm{d}s < \int_0^{t_0} \frac{2ve^s}{1 - 2v(e^s - 1)}\mathrm{d}s = -\ln\Big(1 - 2v(e^{t_0} - 1)\Big)$$
Donc
$$\exp\left(\int_0^{t_0} x_\varepsilon(s)\mathrm{d}s\right) \le \frac{1}{1 - 2v(e^{t_0} - 1)}$$
Ainsi, en utilisant (5),
$$x_\varepsilon(t_0) \le e^{t_0} 2v \exp\left(\int_0^{t_0} x_\varepsilon(s)\mathrm{d}s\right) < \frac{2ve^{t_0}}{1 - 2v(e^{t_0} - 1)},$$
absurde.

*Autre solution.* Posons $u(t) = \exp\left(\int_0^t x_\varepsilon(s)\mathrm{d}s\right)$. On a $u(0) = 0$ et $u'(0) = v$. Il s'agit de montrer que pour tout $0 \le t < \min(T, a_\varepsilon)$ on a
$$u(t) \le \frac{1}{1 - 2v(e^t - 1)}.$$
On a d'après la question précédente
$$u'(t) = x_\varepsilon(t)u(t) \le 2ve^t u(t)^2.$$
Introduisons $w(t) = (1 - 2v(e^t - 1))u(t)$.

Vérifions que $w$ est décroissante. Pour cela, remarquons que
$$w'(t) = -2ve^t u(t) + (1 - 2ve^t + 2v)u'(t) \le -2ve^t u(t) + (1 - 2ve^t + 2v)2ve^t u(t)^2 = -2ve^t u(t)(1 - w(t)).$$
On a $w(0) = 1$ et $w'(0) = -v$. Raisonnons par l'absurde en supposons qu'il existe $t < \min(T, a_\varepsilon)$ tel que $w'(t) \ge 0$ et posons
$$S = \inf\{t < \min(T, a_\varepsilon) : w'(t) \ge 0\}.$$

Par continuité on a donc $w'(S) = 0$. Comme $w$ est strictement décroissante près de 0, on a $S > 0$ et $w(S) < 1$. Mais alors $w'(S) \le -2ve^S u(S)(1 - w(S)) < 0$.

On conclut que $w$ est décroissante sur $[0, \min(T, a_\varepsilon)[$, et donc pour tout $t \in [0, \min(T, a_\varepsilon)[$ on a $w(t) \le 1$.

(7) Puisque $T < \ln(1 + 1/(2v))$, la fonction $t \mapsto \frac{2ve^t}{1-2v(e^t-1)}$ est continue sur $[0, T]$, donc bornée, disons par $C > 0$. Vérifions que

$$\varepsilon_0 = \frac{\ln(2)}{2TC^2}$$

convient. Par l'absurde, prenons $\varepsilon < \varepsilon_0$ et supposons $T_\varepsilon \le T$.

Montrons que $a_\varepsilon = T_\varepsilon$. Si $a_\varepsilon < T_\varepsilon$, par continuité on a

$$\int_0^{a_\varepsilon} \varepsilon (x_\varepsilon(s))^2 \mathrm{d}s = \ln 2.$$

Mais comme $a_\varepsilon < T$, on a

$$\int_0^{a_\varepsilon} \varepsilon (x_\varepsilon(s))^2 \mathrm{d}s \le a_\varepsilon \varepsilon_0 C^2 < T \varepsilon_0 C^2 < \ln(2),$$

absurde. Donc $a_\varepsilon = T_\varepsilon$.

Il s'ensuit par la question (6) que $x_\varepsilon$ reste bornée sur $[0, T_\varepsilon[$, ce qui contredit le théorème de sortie définitive de tout compact.

*Remarque.* Une autre manière de résoudre les questions (6) et (7) consiste à écrire pour $0 \le t < \min(T, a_\varepsilon)$ :

$$x_\varepsilon(t) + 1 \le 1 + 2v \exp\left( \int_0^t (1 + x_\varepsilon(s)) \mathrm{d}s \right).$$

D'après le lemme de Gronwall appliqué à la fonction $x_\varepsilon(t) + 1$, on obtient pour $0 \le t < \min(T, a_\varepsilon)$, $x_\varepsilon(t) + 1 \le \exp(2vt)$ et donc

$$x_\varepsilon(t) \le \exp(2vt) - 1,$$

ce qui permet de démontrer qu'en fait pour tout $T \in ]0, \ln(1 + 1/v)[$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ on a $T_\varepsilon > T$. □

***

## *Problème 5.*

**Première partie.** Soit $(E_i)_{i \ge 1}$ des variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètre 1. On pose $S_0 = 0$ et $S_i = E_1 + \cdots + E_i$ pour $i \ge 1$.

(1) Justifier que $S_n/n$ converge presque sûrement vers 1 lorsque $n \to \infty$.

Pour $t \ge 0$, on note $i(t) \ge 0$ l'unique entier tel que $S_{i(t)} \le t < S_{i(t)+1}$ et on pose

$$P(t) = S_{i(t)}.$$

(2) Montrer que presque sûrement $i(t) \to \infty$ quand $t \to \infty$.

(3) Montrer que

$$\frac{P(t)}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} 1$$

(4) Montrer que pour tout $C \geq 0$,

$$\sup_{0\leq u\leq C}\left|\frac{P(un)}{n} - u\right| \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$$

**Deuxième partie.** Soient $T > 0$, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction lipschitzienne et $z_0 \in \mathbb{R}$.

(5) Justifier que l'équation différentielle $z'(t) = \beta(z(t))$ avec $z(0) = z_0$ admet une unique solution sur $[0, T]$, qui sera notée $z$ dans la suite.

Pour $n \geq 1$, on fixe $Z_n(0) \in \mathbb{R}$ et on suppose que $(Z_n(t))_{0\leq t\leq T}$ vérifie pour tout $0 \leq t \leq T$ :

$$Z_n(t) = Z_n(0) + P\left(n\int_0^t \beta\left(\frac{Z_n(s)}{n}\right)\mathrm{d}s\right),$$

où $P$ a été défini dans la première partie. On pose $\hat{P}(t) = P(t) - t$ et $\bar{Z}_n(t) = Z_n(t)/n$.

On suppose que $Z_n(0)/n \to z_0$ lorsque $n \to \infty$.

(6) Démontrer que presque sûrement, il existe $K > 0$ tel que $|\bar{Z}_n(t)| \leq K$ pour tout $0 \leq t \leq T$.

*Indication.* On pourra utiliser le lemme de Gronwall.

(7) Démontrer que presque sûrement il existe $M > 0$ et $L > 0$ tels que pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$|\bar{Z}_n(t) - z(t)| \leq |\bar{Z}_n(0) - z_0| + \sup_{0\leq s\leq t}\frac{1}{n}|\hat{P}(nMs)| + L\int_0^t |\bar{Z}_n(s) - z(s)|\mathrm{d}s.$$

(8) En déduire que

$$\sup_{0\leq t\leq T}|\bar{Z}_n(t) - z(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$$

**Question bonus. (N'abordez cette question que si vous avez fait tout le reste)**

(9) Est-il vrai que

$$\sup_{u\geq 0}\left|\frac{P(un)}{n} - u\right| \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0?$$

Justifiez votre réponse.

**Corrigé :**

(1) Comme les $(E_i)_{i\geq 1}$ sont des variables aléatoires i.i.d. intégrables d'espérance 1, c'est une conséquence de la loi forte des grands nombres.

(2) Remarquons que $i(t)$ est croissant en $t$. Par (1), presque sûrement $S_n \to \infty$. Par ailleurs, $i(S_n) = n$, d'où le résultat.

*Autre solution.* Puisque $S_n/n \to 1$ presque sûrement quand $n \to \infty$, il existe une constante $c > 0$ telle que $S_n \leq cn$ pour tout $n \geq 1$. Par conséquent $t < S_{i(t)+1} \leq (i(t)+1)c$, et donc $i(t) \geq t/c - 1 \to \infty$ lorsque $t \to \infty$.

(3) On a

$$\frac{P(t)}{t} = \frac{S_{i(t)}}{t}$$

Il suffit donc de montrer que $i(t)/t \to 1$ p.s. lorsque $t \to \infty$. Pour cela, soit $\varepsilon > 0$. Pour $t$ assez grand,

$$i(t)(1-\varepsilon) \leq S_{i(t)} \leq t < S_{i(t)+1} \leq (i(t)+1)(1+\varepsilon),$$

de sorte que

$$\frac{1}{1+\varepsilon} - \frac{1}{t} \leq \frac{i(t)}{t} \leq \frac{1}{1-\varepsilon},$$

d'où le résultat.

(4) Soient $\varepsilon > 0$ et $N > 0$ tels que $|P(t)/t - 1| \leq \varepsilon$ pour $t \geq N$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \leq u \leq C} \left| \frac{P(un)}{n} - u \right| &\leq \sup_{0 < u \leq N/n} u \left| \frac{P(un)}{un} - 1 \right| + \sup_{N/n \leq u \leq C} u \left| \frac{P(un)}{un} - 1 \right| \\
&\leq \frac{N}{n} \sup_{0 < u \leq N} \left| \frac{P(u)}{u} - 1 \right| + C \sup_{u \geq N} \left| \frac{P(u)}{u} - 1 \right| \\
&\leq \frac{N}{n} \sup_{0 < u \leq N} \left| \frac{P(u)}{u} - 1 \right| + C\varepsilon.
\end{aligned}$$

Le premier terme tend presque sûrement vers 0 quand $n \to \infty$, d'où le résultat.

(5) Puisque $\beta$ est lipschitzienne, le critère de sous-linéarité implique les solutions maximales sont globales.

(6) D'après la question (3), presque sûrement il existe deux constantes $a, b > 0$ telles que $P(t) \leq a + bt$ pour tout $t \geq 0$. Par ailleurs, comme $\beta$ est lipschitzienne, il existe deux constants $A, B > 0$ telles que $|\beta(z)| \leq A + B|z|$ pour $z \in \mathbb{R}$. Alors pour $0 \leq t \leq T$, par définition de $Z_n$ :

$$|\bar{Z}_n(t)| \leq |\bar{Z}_n(0)| + \frac{a}{n} + b \int_0^t \beta(\bar{Z}_n(s)) \mathrm{d}s \leq |\bar{Z}_n(0)| + \frac{a}{n} + b \int_0^t (A + B|\bar{Z}_n(s)|) \mathrm{d}s.$$

On en déduit que

$$|\bar{Z}_n(t)| \leq |\bar{Z}_n(0)| + \frac{a}{n} + bAT + B \int_0^t |\bar{Z}_n(s)| \mathrm{d}s.$$

D'après le lemme de Gronwall, il en découle que pour tout $0 \leq t \leq T$.

$$|\bar{Z}_n(t)| \leq \left( |\bar{Z}_n(0)| + \frac{a}{n} + bAT \right) e^{BT}.$$

Comme $|\bar{Z}_n(0)|$ converge lorsque $n \to \infty$, la quantité de droite est bornée, disons par $K > 0$.

(7) En utilisant le fait que $z(t) = z_0 + \int_0^t \beta(z(s)) \mathrm{d}s$, on écrit

$$\bar{Z}_n(t) - z(t) = \bar{Z}_n(0) - z_0 + \frac{1}{n} \hat{P}\left( n \int_0^t \beta\left(\bar{Z}_n(s)\right) \mathrm{d}s \right) - \left( \int_0^t \beta(z(s)) \mathrm{d}s - \int_0^t \beta\left(\bar{Z}_n(s)\right) \mathrm{d}s \right).$$

Soit $L > 0$ une constante de Lipschitz pour $\beta$ et $M > 0$ tel que $|\beta(x)| \leq M$ pour tout $0 \leq x \leq K$. Alors pour $0 \leq t \leq T$ :

$$|\bar{Z}_n(t) - z(t)| \leq |\bar{Z}_n(0) - z_0| + \sup_{0\leq s\leq t} \frac{1}{n}|\hat{P}(nMs)| + L\int_0^t |\bar{Z}_n(s) - z(s)|\mathrm{d}s.$$

(8) D'après le lemme de Gronwall, pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$|\bar{Z}_n(t) - z(t)| \leq \left(|\bar{Z}_n(0) - z_0| + \sup_{0\leq s\leq t} \frac{1}{n}|\hat{P}(nKs)|\right)e^{Mt}.$$

Donc

$$\sup_{0\leq t\leq T} |\bar{Z}_n(t) - z(t)| \leq \left(|\bar{Z}_n(0) - z_0| + \sup_{0\leq s\leq T} \frac{1}{n}|\hat{P}(nMs)|\right)e^{LT},$$

qui tend presque sûrement vers 0 par hypothèse et grâce à la question (4).

(9) Par définition, on remarque que pour $u = S_K/n$ on a

$$\left|\frac{P(un)}{n} - u\right| = \left|\frac{K}{n} - \frac{S_K}{n}\right| = \frac{|S_K - K|}{n}.$$

Soit $A_K$ l'événement $\{|S_K - K| \geq \sqrt{K}\}$. Alors l'événement

$$\limsup_K A_K = \bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{k\geq n} A_k$$

appartient à la tribu queue de $(E_i)_{i\geq 1}$ et sa probabilité vaut donc 0 ou 1 d'après la loi de 0-1 de Kolmogorov. Mais

$$\mathbb{P}\left(\limsup_K A_K\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \geq \limsup_{k\to\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

D'après le théorème central limite, $\mathbb{P}(A_k) \to 1/2$ lorsque $k \to \infty$. On en déduit que $\mathbb{P}(\limsup_K A_K) = 1$. Donc presque sûrement pour une infinité de valeurs de $K$ on a $|S_K - K| \geq \sqrt{K}$. Donc presque sûrement

$$\sup_{u\geq 0}\left|\frac{P(un)}{n} - u\right| \geq \frac{\sqrt{K}}{n}$$

pour une infinité de valeurs de $K$. Donc presque sûrement le sup vaut $+\infty$.

**Remarque.** Ce problème est inspiré du Theorem 5.2 de l'ouvrage *Stochastic Epidemic Models and Their Statistical Analysis* (Andersson & Britton).

□

*Fin*