Examen

Les exercices sont indépendants. Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.

Exercice 1. Question de cours. Énoncer la loi forte de grands nombres.

Exercice 2. Question de cours. Ennoncer le lemme de Gronwall.

Exercice 3. (**équidistribution**) Soit K un espace métrique compact muni de sa tribu borelienne $\mathcal{B}$ et μ une mesure de probabilité. L'objectif de ce problème est de montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de points de K tel que si f est une fonction continue ($f \in C(K, \mathbb{R})$), alors pour $N \to \infty$,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) \to \int_K f(x)\mu(dx).$$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'espace de probabilités tel que $\Omega = \{\ (x_n)_{n\geq 1} \mid x_n \in K\ \}$, $\mathcal{A}$ est la tribu engendré par les sous-ensembles $C = \prod_{i\geq 1} B_i$ avec $B_i \subset \mathcal{B}$ et $B_i = K$ sauf pour un nombre fini d'indices. P est la mesure tel que $P(C) = \prod_{i\geq 1}\mu(B_i)$.

1. On fixe $f \in C(K, \mathbb{C})$ et on définit les v.a. $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ par $X_i(\omega) = f(x_i)$. Montrer que X_i sont independantes.
2. Montrer que X_i ont la même loi.
3. Montrer que X_i est intégrable et calculer l'espérance de X_i.
4. Montrer que pour presque tout $\omega \in \Omega$
$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) \to \int_K f(x)\mu(dx).$$
5. On rappelle le fait que $C(K, \mathbb{R})$ est séparable, i.e. il existe un sous-ensemble dénombrable dense $D \subset C(K, \mathbb{R})$, pour la métrique de la convergence uniforme. Montrer alors qu'en dehors d'un sous ensemble de mesure nulle dans Ω, pour tout $f \in D$, $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) \to \int_K f(x)\mu(dx)$.
6. Pour $\omega \in \Omega$ fixé, on considère les opérateurs $T_N : C(K, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ défini par $T_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n)$ et $T_N : C(K, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ défini par $f \to \int_K f(x)\mu(dx)$. Quelle est la norme de cet opérateur ?
7. Montrer que $T_N(f) \to T(f)$ pour tout $f \in D$ et pour ω en dehors d'un ensemble de mesure nulle.

8. Montrer qu'il existe $\omega \in \Omega$ tel que $T_N(f) \to T(f)$ pour tout $f \in C(K, \mathbb{R})$.

Exercice 4. (**intervalle maximale**)
On cosidère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + \alpha(t)x^2(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

où α est une fonction de classe C^1 sur $[0, \infty[$ telle que $|\alpha(t)| \le 1$ pour tout $t \in [0, +\infty[$. On suppose que $|x_0| = 1 - \delta < 1$ et on note $[0, t_+[$ l'intervalle maximale d'une solution.

1. Montrer que $x(t) = e^{-t}x_0 + \int_0^t e^{-(t-s)}\alpha(s)x^2(s)ds$ pour $t \in [0, t_+[$.
2. On choisit δ_0 tel que $0 < \delta_0 < \delta$ et on définit $A = \{\ t \in [0, t_+[\ |\ |x(t)| \le 1 - \delta_0,\ t \in [0, t]\ \}$.
3. Montrer que $0 \in A$, puis que A est un intervalle.
4. Montrer que, pour tout $T \in A$, on a $|x(t)| \le |x_0|e^{-\delta_0 t}$ pour $t \in [0, T]$.
5. On suppose que $[0, \alpha[\subset A$. Montrer alors que $|x(t)| \le 1 - \delta$ pour tout $t \in [0, \alpha]$. En déduire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\alpha + \epsilon \in A$.
6. Conclure que $t_+ = \infty$.
7. Montrer que la solution maximale vérifie $|x(t)| \le |x_0|e^{-\delta_0 t}$ pour $t \in [0, +\infty[$.

Exercice 5. (**convergence d'une suite de v.a. gaussiennes**) On considère sur $\mathbb{R}$ une suite de mesures $\mu_n = f_n\lambda$, avec λ la mesure de Lebesgue et

$$f_n(x) = \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_n)^2}{2\sigma_n^2}}$$

où $m_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Rappeler la définition de convergence étroite et vague de mesures.
2. On suppose que $m_n \to m \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n \to \sigma < +\infty$. Étudier la convergence étroite de la suite (μ_n).
3. On suppose que la suite (m_n) est bornée et $\sigma_n \to +\infty$. Étudier la convergence étroite et vague de la suite (μ_n).

Exercice 6. (**Un champs de vecteurs en dimension 2**) On cosidère le système

$$\begin{cases} x' = -xy \\ y' = x - y^2 \end{cases} \tag{2}$$

1. Déterminer les points d'équilibre, tracer les lieux où le champ est horizontal et où il est vertical, tracer l'allure du champ et étudier ses symétries.

2. On s'intéresse, dans la suite, aux orbites situées dans le demi-plan $y \geq 0$. On définit les régions $I = \{\ (x,y) \mid x < 0, y \geq 0\ \}$, $II = \{\ (x,y) \mid x > 0, y > \sqrt{2x}\ \}$ et $III = \{\ (x,y) \mid x > 0, 0 \leq y < \sqrt{2x}\ \}$. Montrer que le graphe de la fonction $y = \sqrt{2x}$ est une orbite dans l'ensemble $\{\ (x,y) \mid x > 0, y > 0\ \}$.
3. Montrer que le problème de Cauchy avec condition initiale en t_0 égale à $(x_0, y_0) \in I$ admet une solution maximale définie sur $]t_-, t_+[$ avec $t_- > -\infty$. Montrer que $y(t) \to +\infty$ quand $t \to t_-$.
4. On pose $u(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$. Calculer $u'(t)$ et en déduire que pour $t \in]t_-, t_0]$ on a $\frac{y(t)}{x(t)} = t - t_0 + \frac{y_0}{x_0}$. En déduire que $x(t) \to -\infty$ quand $t \to t_-$.
5. Déduire les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ puis montrer que l'orbite admet une asymptote lorsque $x \to -\infty$ et $y \to +\infty$.
6. Montrer que pour $t > t_0$ l'orbite coupe l'axe des x.
7. Tracer les orbites dans I.
8. Montrer que le problème de Cauchy avec condition initiale en t_0 égale à $(x_0, y_0) \in II$ admet une solution maximale définie sur $]t_-, +\infty[$ et que l'orbite converge vers l'origine avec une pente infinie à l'origine.
9. Montrer pour la région II que t_- est fini et que $y(t) \to +\infty, x \to +\infty$ lorsque $t \to t_-$.
10. Décrire les orbites avec condition initiales dans III.