Examen

Les exercices sont indépendants. Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.
L'épreuve dure 2 heures.

Exercice 1. Question de cours. Énoncer le théorème limite central et le théorème de Levy qui caractérise la convergence en loi par la convergence des fonctions carctéristiques.

Exercice 2. Question de cours. Ennoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz et le théorème de Peano. Donner un exemple d'équation différentielle admettant plusieurs solutions pour un même problème de Cauchy.

Exercice 3. (Processus de Poisson) Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de variables aléatoire positives tel que $W_0 = 0$. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $T_n = W_n - W_{n-1}$. On suppose que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille indépendante de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On suppose $X_0 = 0$ et pour tout $t > 0$,

$$X_t = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbf{1}_{\{W_n\leq t\}},$$

où $\mathbf{1}_{\{W_n\leq t\}}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $\{W_n \leq t\}$. La famille (X_t) est appelée processus de Poisson d'intensité λ.

1. Soient $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq s < t$. Montrer par récurrence que
$$I_n(s,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{s\leq x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n\leq t\}} dx_1 \cdots dx_n = \frac{(t-s)^n}{n!}.$$
2. Montrer que $\mathbf{1}_{\{X_t=n\}} = \mathbf{1}_{\{W_n\leq t\}\cap\{W_{n+1}>t\}} = \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^n T_i\leq t\}\cap\{\sum_{i=1}^{n+1} T_i>t\}}$
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la quantité
$$E[\mathbf{1}_{\{X_t=n\}}].$$
Indication : utiliser le changement de variable, de jacobien 1, $w_1 = t_1, w_2 = t_1 + t_2, \cdots, w_{n+1} = t_1 + \cdots + t_{n+1}$ et l'intégrale calculée dans la question 1).
4. Quelle est la loi de X_t ?

Exercice 4. (Convergence en loi et fonctions de répartition) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose aussi qu'elles sont indépendantes de même loi, de fonction de répartion F. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les variables aléatoires

$$I_n = \min_{1\leq i\leq n} X_i \quad \text{et} \quad M_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i \tag{1}$$

1. Calculer la fonction de répartion de I_n (F_{I_n}) et la fonction de répartion de M_n (F_{M_n}) en fonction de la fonction de répartition F.
2. Calculer la fonction de répartion de I_n. Que peut-on conclure sur la convergence en loi de I_n ? Expliquer.
3. Calculer la fonction de répartion de M_n. Que peut-on conclure sur la convergence en loi de M_n ? Expliquer.
4. On suppose maintenant que les X_n sont de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On considère la variable aléatoire $Z_n = \frac{M_n}{\ln n}$. Calculer la fonction de répartion de Z_n.
5. Etudier la convergence en loi de Z_n.

Exercice 5. (Système prédateur-proies de Lotka-Volterra) Soient $a, b, \alpha, \beta > 0$. On cosidère le système

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = -\alpha y + \beta xy, \end{cases} \tag{2}$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0 > 0$ et $y(0) = y_0 > 0$. Soit $]t_-, t_+[$ le domaine de définition d'une solution maximale.

1. Montrer que pour tout $t \in]t_-, t_+[$, $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$.
2. Montrer que la fonction $H(x, y) = \beta x + by - \alpha \ln x - a \ln y$ est constante sur chaque solution.
3. Montrer que $t_- = -\infty$ et $t_+ = \infty$.
4. Déterminer les points d'équilibres du système sur le quadrant $x > 0, y > 0$.
5. On divise le quadrant en quatre parties en utilisant la droite horizontal et la droite vertical passant par le point d'équilibre. Faire un dessin du champ de vecteurs associé au système.
6. Montrer qu'une solution qui n'est pas constante doit forcement passer par toutes les quatre parties.
7. Montrer que les solutions du problème de Cauchy sont périodiques.
8. Soit ω la période. Calculer les moyennes $\frac{1}{\omega}\int_u^{u+\omega} x(s)ds$ et $\frac{1}{\omega}\int_u^{u+\omega} y(s)ds$ pour $u \in \mathbb{R}$ et $(x(t), y(t))$ une solution.
9. Si x_0 ou y_0 ne sont pas positifs, la solution est-elle périodique ?

Exercice 6. (Équation de Ricatti) Soit l'équation différentielle $x' = t^2 + x^2$ et $\phi : I \to \mathbb{R}$ une solution maximale de l'équation.

1. Montrer que ϕ est croissante.
2. Montrer que s'il existe t_0 tel que $\phi(t_0) > 0$ alors I est majoré. Indication : considerer la fonction $\frac{\phi'(t)}{\phi^2(t)}$.

3. Montrer que s'il existe t_0 tel que $\phi(t_0) < 0$ alors I est minoré.
4. Montrer que I est borné et $\phi(I) = \mathbb{R}$.
5. Montrer qu'il existe une seule solution maximale impaire de l'équation différentielle.
6. Soit $\Phi(t) = \int_{t_0}^{t} \phi(s)ds$ (où $t_0 \in I$). Montrer que $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = e^{-\Phi(t)}$ est une solution sur I de l'équation du second ordre $x'' + t^2 x = 0$. Quel est le domaine de définition des solutions maximales de cette équation ?
7. Trouver des équivalents de ϕ aux extrémités de I.
8. Montrer que $f(t)$ s'annule aux extrémités de I.
9. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution maximale de $x'' + t^2 x = 0$, montrer que si t_- et t_+ sont deux zeros consécutifs de f alors $-\frac{f'(t)}{f(t)}$ est une solution maximale de l'équation de Ricatti sur $]t_-, t_+[$.