

# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Davide Barilari

L3 Math - Année 2017/2018

Version du 6 mars 2018



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Théorie générale des équations différentielles</b>	<b>7</b>
1.1 Existence et unicité . . . . .	8
1.1.1 Hypothèses plus faibles sur $f$ . . . . .	12
1.1.2 Itérations successives . . . . .	13
1.1.3 Equations d'ordre $n$ . . . . .	14
1.2 Solutions maximales et durée de vie . . . . .	15
1.2.1 Solutions maximales . . . . .	15
1.2.2 Durée de vie . . . . .	17
1.2.3 Estimations a priori et solutions globales . . . . .	18
1.2.4 Solutions globales : un exemple sans condition de sous-linéarité . . . . .	20
1.3 Continuité par rapport aux données initiales . . . . .	22
<b>2 Équations différentielles linéaires non autonomes</b>	<b>27</b>
2.1 Équations différentielles linéaires . . . . .	27
2.1.1 Existence et unicité globales . . . . .	28
2.2 La résolvante . . . . .	29
2.3 Quelques propriétés de la résolvante . . . . .	32
2.4 Cas non homogène . . . . .	33
2.4.1 Equations différentielles linéaires d'ordre $n$ . . . . .	35
<b>3 Équations différentielles linéaires autonomes</b>	<b>37</b>
3.1 Approche élémentaire . . . . .	37
3.2 Exponentielle de matrices . . . . .	39
3.3 Calcul de l'exponentielle de matrices . . . . .	41
3.3.1 a. Matrices à coefficients complexes . . . . .	41
3.3.2 b. Matrices à coefficients réels . . . . .	44
3.4 Forme des solutions . . . . .	47
3.4.1 Comportement asymptotique. . . . .	49
3.4.2 Cas d'une matrice diagonalisable. . . . .	51

<b>4</b>	<b>Stabilité des équilibres : linéarisation et fonctions de Lyapunov</b>	<b>53</b>
4.1	Flots et portraits de phase : cas autonome . . . . .	53
4.1.1	Orbites et portraits de phase . . . . .	55
4.2	Linéarisation et perturbation du flot . . . . .	56
4.2.1	Conséquences et signification du théorème 4.3 . . . . .	57
4.2.2	Dépendance par rapport à un paramètre . . . . .	60
4.3	Équilibres et stabilité . . . . .	61
4.3.1	Le cas linéaire . . . . .	62
4.3.2	Le cas affine . . . . .	63
4.4	La stabilité par la linéarisation . . . . .	63
4.4.1	Équilibres hyperboliques . . . . .	65
4.5	Fonctions de Lyapunov . . . . .	66
4.5.1	Champs de gradient . . . . .	66
4.5.2	Fonctions de Lyapunov . . . . .	67
4.5.3	Exemples d'application . . . . .	69

# Introduction

Le cours “Équations Différentielles” a pour objectif de présenter les concepts de la théorie des équations différentielles ordinaires, ainsi que ses applications.

Ces notes de cours se composent de trois parties. La première partie est une présentation de la théorie générale des équations différentielles ordinaires et fait l’objet du chapitre 1. En particulier, on démontrera l’existence et l’unicité des solutions pour tout problème de Cauchy, ce qui nous permettra d’introduire la notion de solution maximale et d’intervalle maximale d’existence d’une solution.

La seconde partie est consacrée à l’étude des équations différentielles linéaires à coefficients constants et à la forme des solutions explicites.

La troisième partie concerne la notion de stabilité dont l’importance, pour de nombreux problèmes pratiques, est comparable à celle de la connaissance effective des solutions.

L’auteur du présent document remercie Ugo Boscain et Yacine Chitour pour avoir autorisé de nombreux emprunts à leur poly “Introduction à l’automatique”, ainsi que Frédéric Jean pour le beau cours “Equations différentielles et fondements de l’automatique” et Emmanuel Trélat pour l’excellent l’ouvrage “Contrôle optimal : théorie et applications” chez Vuibert, auxquels les notes de Boscain-Chitour s’inspirent.

Par ailleurs, ces notes de cours sont loin d’être parfaites et l’auteur saura gré à toute personne lui signalant des corrections à effectuer.



# Chapitre 1

## Théorie générale des équations différentielles

Dans ce chapitre, nous présentons la théorie générale des équations différentielles. Cette théorie permet de modéliser et d'étudier de nombreux processus d'évolution déterministes, finis et *différentiables*.

Plus précisément on va considérer le *problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Dans la formulation (1.1), les *données* sont :

- (i) un ensemble ouvert  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  ;
- (ii) une application continue  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , (parfois appelée "membre de droite de l'équation différentielle").
- (iii) un couple  $(t_0, x_0) \in U$

Souvent  $U$  peut être de la forme  $U = J \times \Omega$  où  $J \subset \mathbb{R}$  est un intervalle ouvert et  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert.

*Remarque.* L'équation  $x'(t) = f(t, x(t))$ , où  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , est en fait un système d'équation. Si on note  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$  les composantes, on a que  $x'(t) = f(t, x(t))$  est équivalente à

$$\begin{cases} x'_1(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x'_n(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad (1.2)$$

**Définition 1.1.** Une *solution* du problème de Cauchy (1.1) est une fonction dérivable  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :

- (i)  $I$  est un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$  ;  $x_0 \in I$  et  $u(t_0) = x_0$ ,
- (ii)  $(t, u(t)) \in U$  pour tout  $t \in I$  ;

(iii) pour tout  $t \in I$ ,  $u'(t) = f(t, u(t))$ .

Une solution est donc en fait un couple  $(u, I)$  : l'intervalle de définition  $I$  fait partie des inconnues. Nous verrons comment caractériser cet intervalle dans la section 1.2.

Notons enfin que, comme l'application  $f$  est supposée continue, toute solution  $u$  de l'équation différentielle est automatiquement de classe  $C^1$  sur son domaine.

**Proposition 1.1.** *Soit  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$  et  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $(t, u(t)) \in U$  pour tout  $t \in I$ . Alors  $u$  est une solution du problème de Cauchy (1.1) si et seulement si  $u \in C(I, \mathbb{R}^n)$  satisfait*

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad (1.3)$$

\*PREUVE.

$\triangleright \Rightarrow$ . Si  $u$  est une solution du problème de Cauchy (1.1) alors  $u$  est dérivable et on a les relations  $u(t_0) = x_0$  et  $u'(s) = f(s, u(s))$  pour tout  $s \in I$ . Alors le théorème fondamental de l'analyse implique que, si  $t \in I$  on a

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(s) ds$$

implique (1.3).

$\Leftarrow$ . Si  $u$  est une fonction continue qui satisfait (1.3), on a  $u(t_0) = x_0$ . De plus  $s \mapsto f(s, u(s))$  est continue dans  $I$  et donc  $t \mapsto \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$  est dérivable. Donc la fonction  $u$  définie par la formule (1.3) est dérivable et on a

$$u'(t) = \frac{d}{dt} \left( x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right) = f(t, u(t)).$$

□

## 1.1 Existence et unicité

Un problème de Cauchy avec une équation qui n'est pas sous forme normale, peut ne pas avoir de solution. Pour s'en convaincre, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} x(t)x'(t) + t = 0, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

On remarque que l'équation s'écrit sous la forme

$$\Phi(t, x, x') = 0, \quad \Phi(t, x, x') = xx' + t$$

avec  $\Phi$  une fonction de classe  $C^\infty$  par rapport à toutes ses variables.

Si ce problème admettait une solution  $u(\cdot)$  définie sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  ouvert contenant 0, on pourrait intégrer l'équation sur un intervalle  $[0, t]$  avec  $t \in I$  et on obtiendrait

$$\int_0^t u(s)u'(s)ds + \frac{1}{2}t^2 = c$$

pour un certain  $c \in \mathbb{R}$ . Pour  $t = 0$ , on a  $c = 0$ , donc on en déduit, pour tout  $t \in I$ ,

$$u(t)^2 + t^2 = 0$$

ce qui est impossible pour  $t \neq 0$ .

Le problème de cet exemple est que l'équation ne peut pas s'exprimer sous la forme (1.1). Une autre situation dans laquelle on peut ne pas avoir existence de solutions est quand la fonction  $f$  n'est pas continue.

*Exercice.* Considérons l'EDO définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} x'(t) = -H(x(t)), \\ x(t_0) = 0, \end{cases}$$

avec  $H(x) = x/|x|$  si  $x$  est non nul et  $H(0) = 1$ . Donner un argument (simple) montrant qu'il n'y a pas de solution pour l'EDO précédente sur n'importe quel voisinage de 0.

A la lumière de ces exemples, il est nécessaire de faire une hypothèse sur la régularité du membre de droite d'une EDO pour espérer avoir un "bout" de solution dans un voisinage ouvert du temps de départ.

*Remarque.* Rappelons que l'un des objectifs des EDO est de modéliser des processus physiques qui sont souvent déterministes : si on connaît la dynamique d'un système et une condition initiale à  $t = t_0$ , alors l'évolution de ce système est unique pour  $t \geq t_0$ . Cette notion de déterminisme se traduit en termes mathématiques par le fait que tout problème de Cauchy a une solution et une seule pour  $t \geq 0$ . Avoir unicité des solutions d'une EDO est donc une nécessité pour un modèle réaliste.

Le propos du Théorème de Cauchy-Lipschitz est de répondre aux questions précédentes. On introduit la classe de fonctions suivante.

**Définition 1.2.** Soit  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue. On dit que  $f$  est *localement Lipschitz par rapport à la deuxième variable dans  $U$*  si pour tout compact  $K \subset U$  connexe, il existe une constante  $L = L(K) > 0$  telle que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

pour tout  $(t, x), (t, y) \in K$ . Si on peut choisir la constante  $L$  de manière indépendante de  $K \subset U$ , on dit que  $f$  est *globalement Lipschitz par rapport à la deuxième variable dans  $U$* .

Cette classe est assez vaste comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 1.2.** *Soit  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$  avec  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  ouvert. Alors  $f$  est localement Lipschitz par rapport à la deuxième variable dans  $U$ .*

PREUVE.

▷ Si  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$  et  $K \subset U$  est un compact connexe, le théorème des valeurs intermédiaires donne

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \sup_{(s, z) \in K} \|Df(s, z)\| \|(t, x) - (t, y)\|$$

c'est-à-dire, en appelant

$$L = L(K) := \sup_{(s, z) \in K} \|Df(s, z)\|$$

on a l'inégalité

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

□

**Théorème 1.3** (Théorème de Cauchy-Lipschitz). *Soit  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  localement Lipschitz par rapport à la deuxième variable dans  $U$ . Alors, pour tout  $(t_0, x_0) \in U$ , il existe  $\delta > 0$  tel que le problème de Cauchy défini en (1.1) possède une unique solution définie sur  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ .*

La démonstration de ce théorème repose sur le théorème du point fixe de Picard. En effet l'idée est d'utiliser la caractérisation intégrale d'une solution du problème de Cauchy (1.1) et dire que  $u$  est une solution définie sur  $I$  si et seulement si  $u$  est un point fixe de l'application

$$T : C(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I, \mathbb{R}^n), \quad (Tu)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

Malheureusement, en général  $T$  n'est pas une contraction. Il faudra donc choisir attentivement un espace des fonctions  $X \subsetneq C(I, \mathbb{R}^n)$  tel que que  $T|_X$  soit une application de  $X$  dans lui même et tel que  $T|_X : X \rightarrow X$  soit une contraction.

PREUVE.

▷ Soit  $K$  un compact dans  $U$  contenant  $(t_0, x_0) \in \text{int}(K)$ . On définit

$$M := \max_K \|f(t, x)\| \geq 0$$

et  $L > 0$  la constante de Lipschitz de  $f$  sur  $K$ . Fixons  $\delta > 0$  et  $\varepsilon > 0$  tels que  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}(x_0, \varepsilon)$  soit contenu dans  $\text{int}(K)$  et tels que

$$\delta < \min \left( \frac{\varepsilon}{M}, \frac{1}{2L} \right).$$

▷ Définissons donc  $X = C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B}(x_0, \varepsilon))$ . Muni de la norme de la convergence uniforme  $\|\cdot\|_\infty$ , c'est un espace complet, car  $X$  fermé dans l'espace  $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$  qui est complet. On rappelle que pour  $u, v \in C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$  on a

$$\|u - v\|_\infty = \sup_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \|u(t) - v(t)\|.$$

L'application

$$(Tu)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

est maintenant une application de  $X$  dans lui-même : en effet, pour  $u \in X$  (on remarque que  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}(x_0, \varepsilon) \subset K$ ) on a pour  $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$

$$\|(Tu)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right\| \leq \delta M \leq \varepsilon.$$

Cette application est en outre  $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne puisque, pour  $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ ,

$$\begin{aligned} \|(Tu)(\cdot) - (Tv)(\cdot)\|_\infty &\leq \sup_{|t-t_0| \leq \delta} \left( \int_{t_0}^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \right) \\ &\leq \sup_{|t-t_0| \leq \delta} \int_{t_0}^t L \|u(s) - v(s)\| ds \\ &\leq \delta L \|u(\cdot) - v(\cdot)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|u(\cdot) - v(\cdot)\|_\infty. \end{aligned}$$

Le théorème du point fixe de Picard s'applique et montre que l'application  $T$  admet un unique point fixe dans  $X$ , c'est-à-dire que le système (1.1) admet une unique solution  $x(\cdot) : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  à valeurs dans la boule  $\overline{B}(x_0, \varepsilon)$ .

▷ Il ne reste plus qu'à montrer que toute solution  $u : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  du système (1.1) est à valeurs dans la boule  $\overline{B}(x_0, \varepsilon)$ . Par l'absurde, supposons qu'une solution de (1.1) sorte de  $\overline{B}(x_0, \varepsilon)$  en temps inférieur à  $\delta$ , et notons  $t_1$  le premier instant où  $u$  sort de la boule ouverte  $B(x_0, \varepsilon)$ . D'après le théorème des accroissements finis,

$$\varepsilon = \|u(t_1) - x_0\| \leq \left( \sup_{t \in [t_0, t_1]} \|u'(t)\| \right) |t_1 - t_0| < M\delta,$$

ce qui contredit  $\delta \leq \varepsilon/M$ . Toute solution de (1.1) sur  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  est donc à valeurs dans  $\overline{B}(x_0, \varepsilon)$ , ce qui montre le théorème. □

On peut déduire de la preuve précédente le corollaire suivant

**Corollaire 1.4.** *Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipchitz, il existe un voisinage  $V$  de  $(t_0, x_0)$  dans  $U$  tel que pour tout  $(t_1, x_1) \in V$  le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases} \quad (1.4)$$

*admet une solution sur l'intervalle  $[t_1 - \delta, t_1 + \delta]$  où  $\delta > 0$  est déterminé dans le Théorème 1.3, et donc uniforme dans  $V$ .*

### Régularité des solutions

**Corollaire 1.5.** *Dans les hypothèse de Cauchy-Lipchitz, si  $f$  est de classe  $C^k$  alors les solutions sont de classe  $C^{k+1}$ .*

*Démonstration.* Par récurrence. Pour  $k = 1$  il faut montrer que si  $f$  est de classe  $C^1$  alors toute solution est de classe  $C^2$ . En fait si  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une solution on a que  $u$  est de classe  $C^1$  et  $u'(t) = f(t, u(t))$  pour tout  $t \in I$ . La fonction  $t \mapsto f(t, u(t))$  est de classe  $C^1$ , car composition d'applications  $C^1$  donc  $t \mapsto u'(t)$  est  $C^1$  ce qui implique  $u$  de classe  $C^2$ .

Supposons maintenant d'avoir montré que  $f$  de classe  $C^{k-1}$  implique que toute solution de classe  $C^k$ , et que de plus  $f$  soit de classe  $C^k$ . Alors  $f$  est aussi de classe  $C^{k-1}$  et donc toute solution  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est  $C^k$ . L'identité  $u'(t) = f(t, u(t))$  pour tout  $t \in I$  implique que  $t \mapsto u'(t)$  est  $C^k$  ce qui implique  $u$  de classe  $C^{k+1}$ .  $\square$

Ce théorème nous permet de calculer sans efforts un développement de Taylor d'une solution d'un problème de Cauchy avec membre de droite régulier.

*Exercice.* Calculer un développement de Taylor en  $t = 0$  de la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{t+2}{t^2+x(t)^2} \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (1.5)$$

On a que  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^\infty$  dans son domaine de définition  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  et  $(t_0, x_0) = (0,1) \in U$ . Donc la solution  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  donné par le théorème de Cauchy-Lipschitz est de classe  $C^\infty$  et satisfait  $u(0) = 1$  et  $u'(0) = 2/u(0) = 2$ . En dérivant l'identité  $u'(t) = f(t, u(t))$  on obtient

$$u''(t) = \frac{t^2 + u(t)^2 - (t+2)(2t + 2u(t)u'(t))}{[t^2 + u(t)^2]^2},$$

ce qui implique  $u''(0) = -7$  et

$$u(t) = u(0) + tu'(0) + \frac{t^2}{2}u''(0) + o(t^2) = 1 + 2t - \frac{7}{2}t^2 + o(t^2)$$

#### 1.1.1 Hypothèses plus faibles sur $f$

Que se passe-t-il si on affaiblit encore les hypothèses et que l'on suppose  $f$  seulement continue ? Un théorème de Peano affirme que, dans ce cas, le système (1.1) admet toujours une solution. En revanche, l'unicité n'est pas garantie. Par exemple le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{|x(t)|} \\ x(0) = 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}$$

admet comme solutions les fonctions  $x_1(t) = 0$  et  $x_2(t) = \frac{t|t|}{4}$ . Il en admet même une infinité puisque, pour tout  $a \geq 0$ , la fonction  $x^a(\cdot)$  définie par

$$x^a(t) = 0 \quad \text{pour } t \leq a, \quad x^a(t) = x_2(t - a) \quad \text{pour } t > a$$

est également solution.

*Exercice.* Étudier l'existence et l'unicité du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt[3]{x(t)} \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

### 1.1.2 Itérations successives

Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet et  $T : X \rightarrow X$  une contraction telle que

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y), \quad 0 < k < 1$$

Le théorème de point fixe de Picard nous dit qu'il existe un unique point fixe  $\bar{x}$  pour  $T$ . En particulier  $T(\bar{x}) = \bar{x}$  et en fait  $T^n(\bar{x}) = \bar{x}$  pour tout  $n \geq 0$ .

Si on fixe un  $x \in X$  arbitraire on a donc

$$d(T^n(x), \bar{x}) = d(T^n(x), T^n(\bar{x})) \leq k^n d(x, \bar{x}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

car  $0 < k < 1$ . Cela implique que la suite  $x_n := T^n(x)$  converge vers le point fixe, quelque soit la valeur initiale  $x_0 = x$ .

On rappelle que dans le contexte du théorème de Cauchy-Lipschitz on a montré que l'application

$$T : X \rightarrow X, \quad (Tu)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

est une contraction, pour  $X$  un sous ensemble fermé (donc complet) des fonctions continues (muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ ) définies sur un intervalle  $I$  contenant  $t_0$  et suffisamment petit.

On obtient la proposition suivante.

**Proposition 1.6.** *Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, on définit la suite des fonctions définie par récurrence*

$$u_0(t) = x_0, \quad u_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) ds$$

Alors  $u_n$  converge uniformément vers la solution  $u$  du problème de Cauchy sur un intervalle  $I$  contenant  $t_0$  et suffisamment petit.

### 1.1.3 Equations d'ordre $n$

Soit  $\varphi : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable; cela signifie : pour tout compact connexe  $K \subset U$  il existe  $M = M(K) > 0$  tel que pour  $(t, x), (t, y)$  dans  $K$

$$|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)| \leq M\|x - y\|$$

On considère l'équation différentielle en une inconnue, d'ordre  $n$

$$y^{(n)}(t) = \varphi(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad (1.6)$$

On va montrer que (1.6) est équivalente à une équation différentielle d'ordre 1 en  $n$  inconnues.

**Proposition 1.7.** *L'équation (1.6) se réécrit dans les variables  $x = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$  dans la manière suivante*

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (1.7)$$

où

$$f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(t, x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n, \varphi(t, x_1, \dots, x_n)).$$

De plus  $f$  est localement lipschitzienne dans  $U$ .

PREUVE.

▷ La vérification de l'expression de  $f$  est laissée au lecteur. On fixe un compact connexe  $K \subset U$  et on calcule

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|^2 \leq \sum_{i=2}^n |x_i - y_i|^2 + |\varphi(t, x) - \varphi(t, y)|^2 \quad (1.8)$$

$$\leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 + M^2\|x - y\|^2 \quad (1.9)$$

$$\leq (1 + M^2)\|x - y\|^2 \quad (1.10)$$

d'où  $f$  localement lipschitzienne dans  $K$  (de constante  $L = \sqrt{1 + M^2}$ ). □

La proposition précédente implique que pour une équation de la forme (1.6) avec  $\varphi$  localement lipschitzienne, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

**Proposition 1.8.** *Soit  $\varphi : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Pour tout  $(t_0, y_0) \in U$ , avec  $y_0 = (y_{0,1}, \dots, y_{0,n}) \in \mathbb{R}^n$ , le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = \varphi(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ y(t_0) = y_{0,1} \\ y'(t_0) = y_{0,2} \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{0,n} \end{cases} \quad (1.11)$$

admet une unique solution locale  $v : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ .

## 1.2 Solutions maximales et durée de vie

Considérons l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad (1.12)$$

où  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est supposé localement Lipschitz par rapport à la deuxième variable.

Nous avons défini au début de ce chapitre une solution de cette équation comme une fonction  $u$  définie sur un certain intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Cette section est consacrée à l'étude de cet intervalle de définition  $I$ . Nous rencontrerons deux types de problèmes.

- Étant donné un couple  $(t_0, x_0) \in U$ , il existe une infinité de solutions de (1.12) satisfaisant la condition initiale  $x(t_0) = x_0$  : par exemple si  $u$  est solution sur l'intervalle  $I$ ,  $t_0 \in I$ , toute restriction de  $u$  à un sous-intervalle de  $I$  contenant  $t_0$  est une solution différente. Pour éviter de considérer comme solutions différentes la même fonction prise sur des sous-intervalles, nous chercherons à associer à une fonction un unique intervalle, le plus grand, sur lequel elle est solution : c'est la notion de *solution maximale*.
- Si on choisit l'intervalle  $I$  le plus grand possible, peut-on le prendre égal à  $\mathbb{R}$  tout entier ? Si ce n'est pas le cas, que se passe-t-il pour la solution ? et quelle est la forme de  $I$  ? C'est le problème de la *durée de vie* des solutions.

### 1.2.1 Solutions maximales

**Définition 1.3.** On dit qu'une solution  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de (1.12) est une *solution maximale* (ou *non prolongeable*) si elle n'a pas de prolongement à un intervalle strictement plus grand, c'est-à-dire si elle n'est pas la restriction à  $I$  d'une solution définie sur un intervalle  $I' \supsetneq I$ .

Nous allons montrer qu'il existe une unique solution maximale de l'équation (1.12) satisfaisant une condition initiale donnée. Nous avons besoin pour cela d'un résultat d'unicité globale.

**Proposition 1.9.** Soit  $u : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $v : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux solutions de l'équation  $x'(t) = f(t, x(t))$  définies sur des intervalles ouverts et telles que  $u(t_0) = v(t_0)$ , pour un certain  $t_0 \in I_1 \cap I_2$ . Alors

- $u = v$  dans  $I_1 \cap I_2$ .
- le recollement de  $u$  et  $v$  est une solution définie sur  $I_1 \cup I_2$

Pour  $u : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $v : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux fonctions telles que  $u = v$  dans  $I_1 \cap I_2$ , leur *recollement* est la fonction  $u \star v : I_1 \cup I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par

$$u \star v(t) = \begin{cases} u(t), & t \in I_1 \\ v(t), & t \in I_2 \end{cases} \quad (1.13)$$

PREUVE.

▷ On montre que l'ensemble

$$A := \{t \in I_1 \cap I_2 : u(t) = v(t)\} \subset I_1 \cap I_2$$

est non vide, ouvert et fermé, donc  $A = I_1 \cap I_2$  par connexité. En fait,  $A$  est non vide car  $t_0 \in I_1 \cap I_2$ . De plus,  $A$  est fermé dans  $I_1 \cap I_2$  car  $A$  est l'ensemble des points où la fonction continue  $u - v$  s'annule. Il reste à montrer que  $A$  est ouvert. Soit  $t_1 \in A$ , alors  $t_1 \in I_1 \cap I_2$  et  $u(t_1) = v(t_1) = x_1$ . On peut donc considérer le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases} \quad (1.14)$$

qui admet une unique solution  $w$  définie sur un intervalle  $[t_1 - \delta, t_1 + \delta]$ , pour un certain  $\delta > 0$ . Donc par unicité  $u(t) = w(t) = v(t)$  pour tout  $t \in [t_1 - \delta, t_1 + \delta]$  et  $[t_1 - \delta, t_1 + \delta] \subset A$ . Donc  $A$  est ouvert.

Le fait que le recollement de  $u$  et  $v$  est une solution est laissé en exercice. □

**Théorème 1.10.** *Pour toute donnée initiale  $(t_0, x_0) \in U$ , il existe une unique solution maximale  $u : ]t_-, t_+[ \rightarrow U$  définie sur un intervalle ouvert et satisfaisant  $u(t_0) = x_0$ . Tout autre solution satisfaisant cette condition initiale est une restriction de  $u$  à un sous-intervalle de  $]t_-, t_+[$ .*

*Remarque.* Insistons sur le fait que l'intervalle de définition d'une solution maximale est toujours un intervalle ouvert  $]t_-, t_+[$ . Les bornes  $t_+$  et  $t_-$  de l'intervalle maximal sont des fonctions de  $(t_0, x_0)$  qui prennent leurs valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :  $t_+$  peut être soit un réel, soit  $+\infty$ , alors que  $t_-$  peut être soit un réel soit  $-\infty$ . Dans tous les cas,  $t_- < t_0 < t_+$ .

PREUVE.

▷ Soit  $I_{max}$  la réunion de tous les intervalles contenant  $t_0$  sur lesquels le système

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

admet une solution. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, cette réunion est un intervalle ouvert, c'est-à-dire de la forme  $I_{max} = ]t_-, t_+[$ . Pour tout  $t \in ]t_-, t_+[$ , définissons  $u(t)$  comme la valeur en  $t$  de n'importe quelle solution de (1.1) définie sur  $[t_0, t]$ . La proposition précédente montre que la fonction ainsi définie est bien solution de (1.1). De plus, par construction, c'est un prolongement de toute autre solution. □

*Remarque.* On remarque que l'unicité de la solution maximale est vrai seulement sous l'hypothèse que  $f$  soit localement Lipschitz par rapport à la deuxième variable. Si on suppose que  $f$  est seulement continue, on a le résultat d'existence de Cauchy-Peano, mais on peut avoir plusieurs solutions maximales du même problème de Cauchy.

### 1.2.2 Durée de vie

Dans cette section pour simplifier on supposera que  $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  est définie sur un ensemble produit

$$U = J \times \Omega$$

On s'intéresse maintenant à l'intervalle de définition  $]t_-, t_+[$  d'une solution maximale  $x(\cdot)$  de (1.12). Cet intervalle peut être différent de  $J$ , même pour les équations les plus simples.

*Exemple.* Considérons l'équation  $x'(t) = x^2(t)$  définie par  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f(t, x) = x^2$ . La solution valant  $x_0$  en  $t_0$  est

$$x(t) = \frac{x_0}{(t_0 - t)x_0 + 1}.$$

L'intervalle maximal de définition de cette solution est  $]t_0 - \frac{1}{x_0}, +\infty[$  si  $x_0 > 0$ ,  $] -\infty, t_0 - \frac{1}{x_0}[$  si  $x_0 < 0$ , et  $\mathbb{R}$  tout entier si  $x_0 = 0$ . Ici  $J = \mathbb{R}$  mais la solution maximale n'est pas toujours définie sur  $J$ .

L'idée générale est que, si une solution ne peut être prolongée sur tout  $J$ , c'est qu'elle s'approche en temps fini du bord de l'ensemble  $U$ . Formalisons cette idée pour la borne supérieure  $t_+$  de l'intervalle (les résultats pour  $t_-$  sont similaires).

**Proposition 1.11.** (*Sortie de compacts*) Soit  $u : ]t_-, t_+[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  une solution maximale de (1.12) avec  $U = J \times \Omega$ . Si  $t_+ < \sup J$  alors  $u$  sort définitivement de tout compact  $K$  contenu dans  $\Omega$  quand  $t \rightarrow t_+$ . Autrement dit il existe  $\bar{t} = \bar{t}(K)$  tel que  $\bar{t} < t_+$  et  $u(\bar{t}) \notin K$ .

On rencontrera essentiellement les deux situations suivantes :

- quand  $\Omega = \mathbb{R}^n$  le théorème nous dit que  $\lim_{t \rightarrow t_+} \|x(t)\| = +\infty$  : c'est le phénomène *d'explosion en temps fini* dont nous avons donné un exemple ci-dessus ;
- quand le bord de  $\Omega$  est borné et que  $x(t)$  converge vers un point du bord quand  $t \rightarrow t_+$ .

PREUVE.

▷ Soit  $u : ]t_-, t_+[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  une solution maximale. Remarquons que  $u$  n'est pas définie en  $t = t_+$ . Par l'absurd, on suppose qu'il existe une suite  $t_n \rightarrow t_+$  (avec  $t_n < t_+$ ) et un compact  $K \subset \Omega$  tels que  $u(t_n) \in K$  pour tout  $n$ . Par compacité de  $K$ , la suite  $u(t_n)$  admet une sous-suite convergente, donc on peut supposer, à sous-suite près, que  $u(t_n) \rightarrow x_+$  pour un certain  $x_+ \in K \subset \Omega$ . En particulier  $(t_n, u(t_n)) \rightarrow (t_+, x_+) \in J \times \Omega$  pour  $n \rightarrow \infty$ . Par le théorème de Cauchy-Lipschitz

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_+) = x_+ \end{cases} \quad (1.15)$$

admet une solution sur un intervalle  $]t_+ - \delta, t_+ + \delta[$ , et le même  $\delta$  convient pour tout  $(\bar{t}, \bar{x}) \in V$  pour un voisinage  $V$  de  $(t_+, x_+) \in J \times \Omega$ . On choisit alors  $N$  tel que  $(t_N, u(t_N)) \in V$  et tel que  $t_N + \delta > t_+$ . Soit  $v : ]t_N - \delta, t_N + \delta[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_N) = u(t_N) \end{cases} \quad (1.16)$$

Le recollement des fonctions  $u$  et  $v$  définit une solution  $\tilde{u}$  définie sur l'intervalle  $]t_-, t_N + \delta[$  qui contient strictement  $]t_-, t_+[$  (grâce aux choix de  $\delta$  et de  $N$ ), avec  $\tilde{u}$  prolongement de  $u$ , ce qui est une contradiction. □

Inversement, retenons une condition suffisante pour que  $t_+ = +\infty$ .

**Corollaire 1.12.** *Si l'image d'une solution maximale  $u : ]t_-, t_+[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  est contenue dans un compact  $K \subset \Omega$  pour tout  $t \in [t_0, t_+[$ , alors  $t_+ = \sup J$ .*

### 1.2.3 Estimations a priori et solutions globales

Dans cette section on trouvera une condition qui garantit l'existence des solutions globales.

**Définition 1.4.** Soit  $f : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction qui satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. On dit qu'une solution maximale  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  du problème de Cauchy associée est *globale* si  $I = J$ .

On veut montrer le résultat suivant, dans le cas où  $f(t, x)$  est définie pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  (et pas seulement dans un ouvert) et a une croissance sous-linéaire.

**Théorème 1.13.** *Soit  $f : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction qui satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz et telle que pour tout intervalle compact  $I \subset J$  il existe  $C_1, C_2 > 0$  tels que*

$$\|f(t, x)\| \leq C_1 + C_2\|x\|, \quad \forall t \in I, x \in \mathbb{R}^n.$$

*Alors toute solution maximale du problème de Cauchy associée est globale.*

En particulier on remarque que l'hypothèse est satisfaite si  $f$  est bornée. La démonstration utilise la version suivante du lemme de Gronwall.

**Lemme 1.14** (Gronwall). Soit  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et non négative, et  $t_0 \in I$ . On suppose qu'il existe  $c_0, c > 0$  tels que

$$\psi(t) \leq c_0 + c \int_{t_0}^t \psi(s) ds, \quad \forall t \in I, t \geq t_0.$$

Alors

$$\psi(t) \leq c_0 e^{c(t-t_0)}, \quad \forall t \in I, t \geq t_0.$$

PREUVE.

▷ On introduit la fonction  $v : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$v(t) = c_0 + c \int_{t_0}^t \psi(s) ds.$$

La fonction  $v$  est de classe  $C^1$  et satisfait  $v'(t) = c\psi(t)$ . Par l'hypothèse on a  $\psi(t) \leq v(t)$  pour  $t \in I, t \geq t_0$ , donc

$$v'(t) \leq cv(t), \quad t \in I, t \geq t_0,$$

ce qui donne

$$\frac{d}{dt} \left( v(t)e^{-c(t-t_0)} \right) = (v'(t) - cv(t))e^{-c(t-t_0)} \leq 0$$

Donc la fonction  $t \mapsto v(t)e^{-c(t-t_0)}$  est décroissante et vaut  $v(t_0) = c_0$  en  $t = t_0$ . On a

$$v(t)e^{-c(t-t_0)} \leq c_0, \quad t \in I, t \geq t_0,$$

ou bien

$$v(t) \leq c_0 e^{c(t-t_0)}, \quad t \in I, t \geq t_0,$$

ce qui termine la preuve car  $\psi(t) \leq v(t)$ . □

On remarque que le lemme de Gronwall est valable pour une fonction scalaire et non négative. Typiquement on l'applique en choisissant  $\psi$  comme la norme d'une solution (ou d'une différence entre deux solutions).

*Démonstration du Théorème.* Soit  $u : ]t_-, t_+[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  une solution maximale du problème de Cauchy. On suppose que  $t_+ < \sup J$ . Alors pour le théorème de sortie de compacts on a

$$\lim_{t \rightarrow t_+} \|u(t)\| = +\infty. \quad (1.17)$$

Mais  $[t_0, t_+]$  est un intervalle compact contenu dans  $J$  donc par l'hypothèse il existe  $C_1, C_2 > 0$  tels que

$$\|f(t, x)\| \leq C_1 + C_2 \|x\|, \quad \forall t \in [t_0, t_+], x \in \mathbb{R}^n.$$

On obtient pour tout  $t \in [t_0, t_+]$

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq \|u(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|f(s, u(s))\| ds \\ &\leq \|u(t_0)\| + \int_{t_0}^t (C_1 + C_2 \|u(s)\|) ds \\ &\leq \|u(t_0)\| + C_1(t_+ - t_0) + C_2 \int_{t_0}^t \|u(s)\| ds \end{aligned}$$

Les hypothèses du lemme de Gronwall sont donc vérifiées (avec  $\psi(t) = \|u(t)\|$ ,  $c_0 := \|u(t_0)\| + C_1(t_+ - t_0)$  et  $c := C_2$ ) ce qui implique

$$\|u(t)\| \leq c_0 e^{c(t_+ - t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, t_+].$$

ce qui entre en contradiction avec (1.17).  $\square$

### 1.2.4 Solutions globales : un exemple sans condition de sous-linéarité

Dans cette section on verra un exemple d'équation différentielle pour laquelle on a des solutions maximales globales mais qui ne satisfait pas la condition de sous-linéarité.

On considère l'équation scalaire d'ordre 2 suivante (équation de Newton)

$$y''(t) = g(y(t)) \tag{1.18}$$

où la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^1$ .

L'équation (1.18) est équivalente au système suivant

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = g(x_1(t)) \end{cases} \tag{1.19}$$

en posant  $(x_1, x_2) = (y, y')$ . Si  $x = (x_1, x_2)$  le système (1.19) s'écrit

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad f(t, x) = (x_2, g(x_1)) \tag{1.20}$$

avec  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  qui est de classe  $C^1$  (indépendante de  $t$ ) et satisfait donc les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz.

On définit la fonction "énergie potentielle"

$$U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad U(s) := - \int_0^s g(\tau) d\tau,$$

et la fonction "énergie totale"

$$E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad E(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + U(x_1).$$

**Proposition 1.15.** *Pour toute solution  $(u_1(t), u_2(t))$  de (1.20) la fonction*

$$t \mapsto E(u_1(t), u_2(t))$$

*est constante sur son intervalle de définition.*

En fait si on dérive on a pour tout  $t$  dans l'intervalle de définition

$$\frac{d}{dt}E(u_1(t), u_2(t)) = u_2(t)u_2'(t) + U'(u_1(t))u_1'(t) \quad (1.21)$$

$$= u_2(t)g(u_1(t)) + g(u_1(t))u_2(t) = 0 \quad (1.22)$$

**Proposition 1.16.** *On suppose que la fonction  $g$  satisfait la condition suivante : il existe  $c_0 \in \mathbb{R}$  tel que*

$$U(s) = - \int_0^s g(\tau) d\tau \geq c_0, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

*Alors toute solution maximale de (1.20) est globale, i.e., définie sur  $\mathbb{R}$ .*

Soit  $(u_1(t), u_2(t))$  une solution maximale de (1.20) définie sur un intervalle  $]t_-, t_+[$ . Soit  $c \in \mathbb{R}$  la constante telle que

$$c = E(u_1(t), u_2(t)) = \frac{u_2(t)^2}{2} + U(u_1(t)) \geq \frac{u_2(t)^2}{2} + c_0$$

On remarque que nécessairement  $c \geq c_0$ . On obtient

$$|u_2(t)| \leq 2\sqrt{c - c_0}, \quad \forall t \in ]t_-, t_+[.$$

De plus

$$u_1(t) = u_1(0) + \int_0^t u_1'(s) ds = u_1(0) + \int_0^t u_2(s) ds,$$

ce qui implique

$$|u_1(t)| \leq |u_1(0)| + \int_0^t |u_2(s)| ds \leq |u_1(0)| + 2t\sqrt{c - c_0}, \quad \forall t \in ]t_-, t_+[.$$

Cela implique que  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  restent bornés sur des intervalles bornés donc  $]t_-, t_+[ = \mathbb{R}$ .

*Remarque* (Potentiel borné mais pas de condition de sous-linéarité). En choisissant  $g(s) = -s^3$  on peut voir que les hypothèse de la Proposition sont satisfaites avec  $c_0 = 0$  car

$$U(s) = - \int_0^s (-s^3) ds = \frac{s^4}{4} \geq 0$$

sonc toutes les solutions du système

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t)^3 \end{cases} \quad (1.23)$$

sont globales. Par ailleurs la fonction  $f(t, x_1, x_2) = (x_2, -x_1^3)$  ne satisfait pas la condition de sous-linéarité (exercice!). Comparer cet exemple avec la méthode de Lyapunov en Chapitre 4.

*Remarque* (Potentiel pas borné). En choisissant  $g(s) = 2s^3$  on obtient l'équation

$$y''(t) = 2y(t)^3 \quad (1.24)$$

Dans ce cas l'énergie potentielle n'est pas borné inférieurement car

$$U(s) = - \int_0^s (2s^3) ds = -\frac{s^4}{2} \rightarrow -\infty, \quad \text{pour } |s| \rightarrow \infty$$

Il n'est pas difficile de voir que l'unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) = 2y(t)^3 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad (1.25)$$

est donné par  $u(t) = (1 - t)^{-1}$ , définie sur l'intervalle  $] - \infty, 1[$ . Donc il est faut que toute solution maximale de l'équation (1.24) est globale. La condition que le potentiel soit borné inférieurement est donc nécessaire.

### 1.3 Continuité par rapport aux données initiales

Soit  $f : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $f$  localement Lipschitz par rapport à la deuxième variable. On fixe  $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$ . D'après le corollaire de Cauchy-Lipschitz on peut trouver

- un voisinage  $V$  de  $(t_0, x_0)$
- un intervalle  $I \subset J$
- un compact  $K \subset U = J \times \Omega$

tel que

- pour tout  $(t_1, x_1) \in V$  la solution  $u(t)$  du problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases} \quad (1.26)$$

est définie dans l'intervalle  $I$ .

- pour tout  $(t_1, x_1) \in V$  le graph de la solution de (1.36) reste dans  $K$ .

La prochaine proposition compare les solutions des problèmes

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases} \quad (1.27)$$

notées  $u_0$  et  $u_1$ , définies sur l'intervalle  $I$ .

**Théorème 1.17.** *Dans les hypothèses précédentes il existe des constantes  $L, M > 0$  telles que pour tout  $t \in I$*

$$\|u_1(t) - u_0(t)\| \leq (\|x_1 - x_0\| + M|t_1 - t_0|) e^{L|t-t_0|}$$

*En particulier si  $t_1 = t_0$  on a*

$$\|u_1(t) - u_0(t)\| \leq \|x_1 - x_0\| e^{L|t-t_0|}, \quad \forall t \in I.$$

PREUVE.

▷ Par définition on a

$$u_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_0(s)) ds \quad u_1(t) = x_1 + \int_{t_1}^t f(s, u_1(s)) ds \quad (1.28)$$

donc

$$\|u_1(t) - u_0(t)\| \leq \|x_1 - x_0\| + \left\| \int_{t_1}^t f(s, u_1(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, u_0(s)) ds \right\|$$

En utilisant l'identité

$$\int_{t_1}^t f(s, u_1(s)) ds = \int_{t_1}^{t_0} f(s, u_1(s)) ds + \int_{t_0}^t f(s, u_1(s)) ds$$

on obtient

$$\|u_1(t) - u_0(t)\| \leq \|x_1 - x_0\| + \left\| \int_{t_1}^{t_0} f(s, u_1(s)) ds \right\| \quad (1.29)$$

$$+ \left\| \int_{t_0}^t f(s, u_1(s)) - f(s, u_0(s)) ds \right\| \quad (1.30)$$

Si l'on définit  $M = \max_K \|f(t, x)\|$  on a

$$\|u_1(t) - u_0(t)\| \leq \|x_1 - x_0\| + M|t_1 - t_0| + \int_{t_0}^t \|f(s, u_1(s)) - f(s, u_0(s))\| ds$$

Comme  $f$  est localement lipschitzienne sur  $K$  avec constante de Lipschitz  $L > 0$  on a

$$\|u_1(t) - u_0(t)\| \leq \|x_1 - x_0\| + M|t_1 - t_0| + L \int_{t_0}^t \|u_1(s) - u_0(s)\| ds$$

Le lemme de Gronwall nous permet de conclure

$$\|u_1(t) - u_0(t)\| \leq (\|x_1 - x_0\| + M|t_1 - t_0|) e^{L|t-t_0|}$$

□

**Corollaire 1.18.** Soit  $(t_n, x_n)$  une suite dans  $J \times \Omega$  telle que  $(t_n, x_n) \rightarrow (t_0, x_0)$ . Notons  $u_0$  et  $u_n$  les solutions des problèmes

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_n) = x_n \end{cases} \quad (1.31)$$

définie sur un intervalle commun  $I$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_0\|_{\infty} \rightarrow 0$$

On peut remarquer que si  $(t_n, x_n) \rightarrow (t_0, x_0)$  on peut choisir  $N$  assez grand tel que pour  $n \geq N$  le points  $(t_n, x_n) \in V$  défini au début de la section, dont l'existence de l'intervalle  $I$  sur lequel toutes les solutions sont définies.

**Proposition 1.19.** Soient  $f, g : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\|f - g\|_0 \leq \varepsilon$ . Supposons qu'il existe un intervalle  $I \subset J$  tel que les solutions  $u, v$  de

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x'(t) = g(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.32)$$

sont définie sur  $I$ . Alors

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \varepsilon |t_1 - t_0| e^{L|t-t_0|}.$$

PREUVE.

▷ Par définition on a

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad v(t) = x_0 + \int_{t_0}^t g(s, v(s)) ds \quad (1.33)$$

donc

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \left\| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds - \int_{t_0}^t g(s, v(s)) ds \right\|$$

On obtient

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \left\| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) - f(s, v(s)) ds \right\| \quad (1.34)$$

$$+ \left\| \int_{t_0}^t f(s, v(s)) - g(s, v(s)) ds \right\| \quad (1.35)$$

Et de suite

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \varepsilon |t_1 - t_0| + L \int_{t_0}^t \|u(s) - v(s)\| ds$$

Le lemme de Gronwall nous permet de conclure

$$\|u_1(t) - u_0(t)\| \leq \varepsilon |t_1 - t_0| e^{L|t-t_0|}$$

□

**Continuité par rapport aux paramètres**

Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$  un ouvert, espace des paramètres. Soit  $f : J \times \Omega \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $f(t, x, \varepsilon)$  localement Lipschitz par rapport à la deuxième et troisième variable. On fixe  $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$  et  $\varepsilon_0 \in \Lambda$ . On peut supposer qu'il existe (admis)

- un voisinage  $W$  de  $\varepsilon_0$  dans  $\Lambda$ .
- un intervalle  $I \subset J$
- un compact  $K \subset U = J \times \Omega$

tel que

- pour tout  $\varepsilon \in W$  la solution  $u_\varepsilon(t)$  du problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), \varepsilon) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.36)$$

est définie dans l'intervalle  $I$ .

- pour tout  $\varepsilon \in W$  le graph de la solution de (1.36) reste dans  $K$ .

La prochaine proposition compare les solutions des problèmes

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), \varepsilon) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), \varepsilon_0) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.37)$$

notées  $u_\varepsilon$  et  $u_{\varepsilon_0}$ , définies sur l'intervalle  $I$ .

**Théorème 1.20.** *Dans les hypothèse précédentes il existe des constantes  $L, M > 0$  telles que pour tout  $t \in I$*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \|u_\varepsilon(t) - u_{\varepsilon_0}(t)\|_\infty = 0.$$



# Chapitre 2

## Équations différentielles linéaires non autonomes

### 2.1 Équations différentielles linéaires

On suppose que le membre de droite de l'équation est linéaire par rapport à l'état  $x$  c'est-à-dire qu'il prend la forme

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad t \in J. \quad (2.1)$$

Précisons les notations. Les *données* sont :

- un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$  ;
- une application  $A : J \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  de classe  $C^k$  ( $k$  est un entier positif ou  $k = \infty$ ) ; chaque valeur  $A(t)$  est donc une matrice ( $n \times n$ ) à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .

Une *solution* de (2.1) est une application dérivable  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que, pour tout  $t \in I$ , sa dérivée  $x'(t) = \frac{dx}{dt}(t)$  vérifie  $x'(t) = A(t)x(t)$ . Noter qu'une solution est automatiquement de classe  $C^{k+1}$ .

Nous traiterons aussi le cas un peu plus général des équations différentielles *affines*,

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad t \in J, \quad (2.2)$$

la donnée  $b(\cdot)$  étant une application de  $J$  dans  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ . Nous verrons que l'étude de ces équations se déduit de celle des équations linéaires.

*Remarque.* Il est fréquent dans la littérature que l'expression équation linéaire soit utilisé pour les équations affines, les équations (2.1) étant alors appelées équations linéaires *homogènes*.

### 2.1.1 Existence et unicité globales

**Théorème 2.1** (Existence, unicité, solutions globales). *Soient  $t_0 \in J$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . L'unique solution maximale  $u : ]t_-, t_+[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  de l'équation*

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad t \in J, \quad (2.4)$$

*satisfaisant à la condition initiale*

$$x(t_0) = x_0.$$

*est globale, i.e.,  $]t_-, t_+[ = J$ .*

Insistons sur le fait que ce théorème garantit l'existence de  $x(\cdot)$  sur *tout* l'intervalle  $J$ . Ce phénomène est propre aux équations linéaires.

La preuve de ce théorème repose sur le théorème de Cauchy-Lipschitz et du critère de sous-linéarité.

Dans la suite on utilise la norme matricielle

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

ce qui satisfait l'inégalité  $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ .

\*PREUVE.

▷ L'équation en question s'écrit sous la forme

$$x' = f(t, x), \quad f(t, x) = A(t)x + b(t)$$

La fonction  $f$  est bien localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable car pour tout compact  $K \subset J \times \Omega$  compact connexe de la forme  $K := I \times C$  (on choisit  $I$  un intervalle compacte dans  $J$ ), on a

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \|A(t)(x - y)\| \leq \max_{t \in I} \|A(t)\| \|x - y\| \leq L \|x - y\|$$

où  $L = \max_{t \in I} \|A(t)\|$  ce qui existe car  $I$  est compact et  $t \mapsto A(t)$  continue. Les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sont donc satisfaites et on a l'existence et unicité d'une solution maximale  $u : ]t_-, t_+[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  du problème de Cauchy.

En plus, si  $I$  est un intervalle compacte dans  $J$  on a

$$\|f(t, x)\| \leq \|A(t)\|\|x\| + \|b(t)\| \leq \max_{t \in I} \|A(t)\|\|x\| + \max_{t \in I} \|b(t)\| = C_1\|x\| + C_2$$

avec  $C_1 = \max_{t \in I} \|A(t)\|$  et  $C_2 = \max_{t \in I} \|b(t)\|$  qui existent car  $I$  est compact et  $t \mapsto A(t)$  et  $t \mapsto b(t)$  sont continues. Donc  $f$  satisfait le critère de sous-linéarité et ses solutions maximales sont globales.

□

## 2.2 La résolvante

Revenons à l'étude des équations linéaires dans  $\mathbb{R}^n$

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad (2.1)$$

et notons  $\mathcal{E}$  l'ensemble des solutions de cette équation.

**Proposition 2.2.** *L'ensemble  $\mathcal{E}$  est un sous-espace vectoriel de  $C^1(J, \mathbb{R}^n)$  de dimension  $n$ .*

PREUVE.

▷ Il est immédiat que  $\mathcal{E}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Introduisons alors

$$T_{t_0} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad T_{t_0}(u) = u(t_0), \quad (2.5)$$

l'application qui à une solution  $u$  associe sa valeur en  $t_0$ . C'est clairement une application linéaire.

Il résulte directement de l'existence et de l'unicité des solutions que  $L_{t_0}$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathcal{E}$ , ce qui prouve le résultat. □

**Proposition 2.3.** *Soit  $u_1, \dots, u_n : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  des solutions de l'équation*

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad (2.6)$$

*Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des solutions de cette équation. On a l'équivalence*

- (i)  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est une base de  $\mathcal{E}$ ,
- (ii) pour tout  $t_0 \in J$ ,  $\{u_1(t_0), \dots, u_n(t_0)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ ,
- (iii) il existe  $t_0 \in J$  tel que  $\{u_1(t_0), \dots, u_n(t_0)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ .

\*PREUVE.

▷ Les implications (i)  $\Rightarrow$  (ii) et (ii)  $\Rightarrow$  (iii) sont évidentes. Supposons que (iii) soit vraie pour un certain  $t_0 \in J$ . Alors on considère l'isomorphisme  $T_{t_0} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$  introduit dans (2.5). Soit  $v_i := T_{t_0}^{-1}(u_i(t_0))$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Comme  $T_{t_0}$  est un isomorphisme  $v_1, \dots, v_n$  est une base de  $\mathcal{E}$ , mais par unicité des solutions  $v_i$  coïncide avec la fonction  $u_i$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ , donc on a montré que  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est une base de  $\mathcal{E}$ . □

Si  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est une base de  $\mathcal{E}$  on appelle la matrice wronskienne associée à cette base  $\{u_1, \dots, u_n\}$  la matrice

$$W(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1(t) & \cdots & u_n(t) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

où les solutions sont les colonnes de  $W$ . La matrice  $W(t)$  est inversible pour tout  $t \in J$  et satisfait l'équation différentielle matricielle (exercice!)

$$W'(t) = A(t)W(t)$$

**Définition 2.1.** On appelle *résolvante* de l'équation (2.1) la matrice  $R_A(t, t_0)$  de taille  $n$  qui s'écrit par colonne

$$R_A(t, t_0) = \left( \begin{array}{c|ccc|c} \xi_1(t; t_0) & & & & \xi_n(t; t_0) \\ \hline & & \cdots & & \end{array} \right)$$

où  $t \mapsto \xi_i(t; t_0)$  est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t), \\ x(t_0) = e_i \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $e_1, \dots, e_n$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 2.4.** Pour tout  $t_0 \in J$ , on a les identités

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} R_A(t, t_0) = A(t)R_A(t, t_0), & t \in J \\ R_A(t_0, t_0) = I, \end{cases} \quad (2.8)$$

En particulier  $u(t) = R(t, t_0)x_0$  est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.9)$$

\*PREUVE.

▷ On fixe  $t_0 \in J$ . On a  $R_A(t_0, t_0) = I$  car les colonnes  $\xi(t; t_0)$  de la matrice satisfont  $\xi(t_0; t_0) = e_i$ , le  $i$ -ème élément de la base canonique. La première propriété est conséquence du fait que  $t \mapsto R_A(t, t_0)$  est une matrice wronskienne associée à la base des solutions  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . On pose maintenant  $u(t) = R_A(t, t_0)x_0$ . On a

$$u(t_0) = R_A(t_0, t_0)x_0 = x_0$$

et

$$u'(t) = \frac{d}{dt} R_A(t, t_0)x_0 = A(t)R_A(t, t_0)x_0 = A(t)u(t)$$

donc  $u$  est bien l'unique solution du problème de Cauchy.

□

*Remarque.* Si on écrit

$$R_A(t, t_0) = \left( \begin{array}{c|ccc|c} \xi_1(t; t_0) & & & & \xi_n(t; t_0) \\ \hline & & \cdots & & \end{array} \right), \quad x_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

on a que la solution  $u(t) = R_A(t; t_0)x_0$  s'écrit comme

$$u(t) = \left( \begin{array}{c|ccc} & & & \\ \xi_1(t; t_0) & & \cdots & \xi_n(t; t_0) \\ & & & \end{array} \right) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n c_i \xi_i(t; t_0)$$

ce qui signifie bien que  $u$  est une combinaison linéaire de  $\xi_1, \dots, \xi_n$ .

**Proposition 2.5.** *Pour tous  $t_0, t_1, t_2$  dans  $J$ ,*

$$R_A(t_2, t_0) = R_A(t_2, t_1) \cdot R_A(t_1, t_0).$$

*Notamment, pour tous  $t_1, t_2$  dans  $J$ ,*

$$R_A(t_0, t_1)^{-1} = R_A(t_1, t_0).$$

*Si  $A(\cdot)$  est de classe  $C^k$ , l'application  $t \mapsto R_A(t, t_0)$  est de classe  $C^{k+1}$ .*

\*PREUVE.

▷ La deuxième implication est une conséquence de la première en choisissant  $t_2 = t_0$  et en utilisant  $R_A(t_0, t_0) = I$ . Pour montrer la deuxième on fixe  $t_0, t_1 \in J$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  arbitraires. On définit  $u, v : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  par

$$u(t) = R_A(t, t_0)x_0, \quad v(t) = R_A(t, t_1) \cdot R_A(t_1, t_0)x_0.$$

Il suffit de montrer que  $u(t) = v(t)$  pour tout  $t \in J$  (cela pour toute choix de  $t_0, t_1 \in J$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ). On a que  $u$  et  $v$  coïncident en  $t = t_1$  car

$$u(t_1) = R_A(t_1, t_0)x_0, \quad v(t_1) = R_A(t_1, t_1) \cdot R_A(t_1, t_0)x_0 = R_A(t_1, t_0)x_0.$$

et elles sont solutions de la même équation différentielle car

$$u'(t) = \frac{d}{dt} R_A(t, t_0)x_0 = A(t)R_A(t, t_0)x_0 = A(t)u(t)$$

et

$$v'(t) = \frac{d}{dt} R_A(t, t_1) \cdot R_A(t_1, t_0)x_0 = A(t)R_A(t, t_1) \cdot R_A(t_1, t_0)x_0 = A(t)v(t)$$

donc elles coïncident dans  $J$  par unicité de la solution. □

*Remarques.* Considerons le cas  $n = 1$ . Dans ce cas la matrice  $A(t) = a(t)$  est une fonction scalaire et l'équation devient

$$x'(t) = a(t)x(t), \tag{2.10}$$

pour laquelle on sait calculer la résolvante

$$R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}.$$

Comme nous venons de le voir, pour résoudre une équation différentielle linéaire non autonome, il suffit de savoir calculer la résolvante. Malheureusement, en dehors du cas autonome, dont on s'occupera dans le prochain chapitre, **il est très rare de pouvoir donner une expression explicite de la résolvante**. Nous allons voir en revanche que l'on peut obtenir des informations *qualitatives* sur les solutions de l'équation grâce à l'étude de la résolvante.

### 2.3 Quelques propriétés de la résolvante

**Proposition 2.6.** Soit  $t_0 \in \mathbb{R}$ . La fonction  $D(t) = \det R_A(t, t_0)$  vérifie l'équation différentielle

$$\begin{cases} D'(t) = \operatorname{tr}(A(t)) D(t) \\ D(t_0) = 1 \end{cases},$$

ce qui implique

$$\det R_A(t, t_0) = \exp \left( \int_{t_0}^t \operatorname{tr}(A(s)) ds \right).$$

PREUVE.

▷ Rappelons que, si  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ ,  $D \det(A) \cdot H = (\det A) \operatorname{tr}(A^{-1}H)$ . On a donc

$$\begin{aligned} D'(t) &= (\det R_A(t, t_0)) \operatorname{tr}(R_A^{-1}(t, t_0) R_A'(t, t_0)) \\ &= D(t) \operatorname{tr}(A(t)). \end{aligned}$$

La conclusion de la proposition suit. □

**Corollaire 2.7** (Liouville). Si pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $A(t)$  est de trace nulle, alors le déterminant de  $R_A(t, s)$  est identiquement égal à 1.

Il résulte de ce corollaire que, si  $A(t)$  est de trace nulle, l'équation différentielle (2.1) préserve les volumes. En effet, si  $\Gamma$  est un domaine de  $\mathbb{R}^n$ , notons  $\Gamma_t$  son transport de  $t_0$  à  $t$  par l'équation (2.1), c'est-à-dire

$$\Gamma_t = \{x(t) : x(\cdot) \text{ solution de (2.1) t.q. } x(t_0) \in \Gamma\},$$

ou encore  $\Gamma_t = R_A(t, t_0)\Gamma$ . Alors, en utilisant la formule de changement de variable dans les intégrales multiples, on obtient

$$\operatorname{vol}(\Gamma_t) = |\det R_A(t, t_0)| \operatorname{vol}(\Gamma),$$

et donc  $\operatorname{vol}(\Gamma_t) = \operatorname{vol}(\Gamma)$  si  $\operatorname{tr} A(t) \equiv 0$ .

La préservation du volume a une conséquence sur le comportement asymptotique des solutions : il est en effet impossible dans ce cas que toutes les solutions de (2.1) tendent vers 0 quand  $t \rightarrow \pm\infty$  (de même qu'il est impossible que  $\|x(t)\|$  tende vers l'infini pour toute solution  $x(\cdot)$ ).

Une classe particulièrement intéressante de matrices de trace nulle est l'ensemble des matrices antisymétriques, qui interviennent fréquemment dans les problèmes issus de la physique.

**Proposition 2.8.** *Si, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $A(t)$  est une matrice réelle antisymétrique, la résolvante  $R_A(t, s)$  est une rotation pour tous  $t, s \in \mathbb{R}$ .*

Rappelons qu'une rotation est une matrice  $R \in M_n(\mathbb{R})$  orthogonale (c'est-à-dire  $R^T R = I$ ) et de déterminant 1.

PREUVE.

▷ On sait déjà d'après le corollaire précédent que  $\det R_A(t, s) \equiv 1$ . D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(R_A(t, s)^T R_A(t, s)) &= \frac{\partial}{\partial t} R_A(t, s)^T R_A(t, s) + R_A(t, s)^T \frac{\partial}{\partial t} R_A(t, s) \\ &= R_A(t, s)^T A(t)^T R_A(t, s) + R_A(t, s)^T A(t) R_A(t, s) \\ &= R_A(t, s)^T (A(t)^T + A(t)) R_A(t, s) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi,  $R_A(t, s)^T R_A(t, s)$  est constant. Comme  $R_A(s, s) = I$ , on a la conclusion. □

Une conséquence de ce résultat est que, si  $A(t)$  est une matrice réelle antisymétrique pour tout  $t$ , l'équation différentielle (2.1) préserve la norme. En effet, si  $x(\cdot)$  est une solution de l'équation,

$$\|x(t)\| = \|R_A(t, t_0)x(t_0)\| = \|x(t_0)\|,$$

puisque  $R_A(t, t_0)$  est une rotation. En particulier, toute solution est bornée. En revanche il est impossible qu'une solution tende vers 0 (sauf si  $x(\cdot) \equiv 0$  bien sûr...). Nous verrons à la section 4.3 que l'on dit alors que 0 est un équilibre stable mais non asymptotiquement stable.

## 2.4 Cas non homogène

Dans cette section on donne une formule explicite pour la solution de l'équation non homogène

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad t \in J, \quad (2.11)$$

en terme de la résolvante

**Théorème 2.9** (Formule de Duhamel). Soient  $t_0 \in J$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . L'unique solution de l'équation

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad t \in J, \quad (2.14)$$

satisfaisant à la condition initiale

$$x(t_0) = x_0.$$

satisfait

$$u(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R(t, s)b(s)ds. \quad (2.15)$$

\*PREUVE.

▷ On vérifie que la formule satisfait à la fois l'équation et la condition initiale. En fait si on définit  $u$  comme dans (2.15) on a

$$u(t_0) = R(t_0, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_0} R(t_0, s)b(s)ds = x_0. \quad (2.16)$$

et

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{d}{dt}R(t, t_0)x_0 + \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t R(t, s)b(s)ds \\ &= A(t)R(t, t_0)x_0 + R(t, t)b(t) + \int_{t_0}^t \frac{d}{dt}R(t, s)b(s)ds \\ &= A(t)R(t, t_0)x_0 + b(t) + \int_{t_0}^t A(t)R(t, s)b(s)ds \\ &= A(t) \left( R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R(t, s)b(s)ds \right) + b(t) \\ &= A(t)u(t) + b(t) \end{aligned}$$

où on a utilisé la formule

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t f(t, s)ds = f(t, t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial t}(t, s)ds$$

□

Si on n'est pas satisfait par la preuve précédente on peut argumenter comme suit.

\*PREUVE.

▷ Selon le principe "variation de la constante", on cherche une solution particulière de l'équation de la forme

$$v(t) = R(t, t_0)c(t)$$

On trouve la relation

$$\frac{d}{dt}R(t, t_0)c(t) + R(t, t_0)c'(t) = A(t)R(t, t_0)c(t) + b(t)$$

ce qui donne

$$R(t, t_0)c'(t) = b(t) \quad \implies \quad c'(t) = R(t_0, t)b(t)$$

donc on peut choisir une solution particulière sous la forme

$$v(t) = R(t, t_0) \int_{t_0}^t R(t_0, s)b(s)ds = \int_{t_0}^t R(t, s)b(s)ds$$

On remarque que cette solution satisfait  $v(t_0) = 0$ .

Par linéarité la solution générale s'exprime comme solution générale de l'homogène plus une solution particulière. On obtient donc grâce à la condition  $v(t_0) = 0$  la formule

$$u(t) = R(t, t_0)x_0 + v(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R(t, s)b(s)ds$$

□

### 2.4.1 Equations différentielles linéaires d'ordre $n$

On considère l'équation différentielle linéaires d'ordre  $n$  scalaire

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t)y^{(i)}(t) = \beta(t) \quad (2.17)$$

où  $\alpha_i : J \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}$  sont fonctions continue, pour  $i = 0, \dots, n-1$  On va montrer que (1.6) est équivalente à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 non autonome d'une forme spécifique.

**Proposition 2.10.** *L'équation (2.17) se réécrit dans les variables  $x = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$  dans la manière suivante*

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \quad (2.18)$$

où

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

La proposition précédente implique

**Proposition 2.11.** Soit  $\alpha_i : J \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}$  sont fonctions continue, pour  $i = 0, \dots, n-1$ . L'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t)y^{(i)}(t) = \beta(t), \quad (2.19)$$

est un espace vectoriel de dimension  $n$ .

*Remarque.* Pour le critère de la section précédente on a que  $n$  solutions  $v_1, \dots, v_n : J \rightarrow \mathbb{R}$  de l'équation (2.19) forment une base si et seulement si la matrice wronskienne

$$W(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) & \cdots & v_n(t) \\ v_1'(t) & \cdots & v_n'(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ v_1^{(n-1)}(t) & \cdots & v_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

est inversible pour tout  $t \in J$ .

# Chapitre 3

## Équations différentielles linéaires autonomes

Nous abordons dans ce chapitre l'étude des équations différentielles les plus simples, les équations linéaires *autonomes* – aussi appelées équations linéaires à *coefficients constants* –, c'est-à-dire les équations de la forme

$$x'(t) = Ax(t). \quad (3.1)$$

Précisons les notations. La *donnée*  $A \in M_n(\mathbb{K})$  est une matrice carrée ( $n \times n$ ) à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . L'*inconnue* est une application dérivable  $x(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Résoudre l'équation (3.1) signifie trouver une application  $x(\cdot)$  telle que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la dérivée  $x'(t) = \frac{dx}{dt}(t)$  vérifie  $x'(t) = Ax(t)$ .

Cette équation est dite autonome parce que la donnée  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ne dépend pas du temps.

### 3.1 Approche élémentaire

Commençons par un cas connu, celui d'une équation scalaire

$$x'(t) = \alpha x(t),$$

où  $\alpha$  est un réel et  $x$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Une solution  $x(\cdot)$  de cette équation décrit l'évolution en fonction du temps d'une quantité dont le taux de variation  $\alpha$  est constant.

Rappelons (cela résulte également du théorème 3.2) que la seule solution de cette équation valant  $x_0$  à l'instant  $t_0$  est

$$x(t) = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}.$$

Cette expression nous fournit toutes les informations que l'on peut souhaiter sur l'équation différentielle. Par exemple le comportement asymptotique de  $x(t)$  quand  $t \rightarrow +\infty$  est caractérisé par le signe de  $\alpha$  :

- si  $\alpha < 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ ,
- si  $\alpha = 0$ ,  $x(t)$  est constant,
- si  $\alpha > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = \begin{cases} +\infty & \text{si } x(t_0) \neq 0 \\ 0 & \text{si } x(t_0) = 0 \end{cases}$ .

Considérons maintenant un système de deux équations différentielles

$$\begin{cases} x_1' &= \alpha_1 x_1 \\ x_2' &= \alpha_2 x_2 \end{cases}.$$

C'est un système très simple puisque les fonctions  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  sont découplées. La solution de ce système est bien évidemment

$$x_1(t) = x_1(t_0)e^{\alpha_1(t-t_0)}, \quad x_2(t) = x_2(t_0)e^{\alpha_2(t-t_0)}.$$

Comme dans le cas scalaire, on a une connaissance complète du comportement des solutions. Par exemple, si  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont strictement négatifs, toute solution  $(x_1(t), x_2(t))$  du système d'équations tend vers l'origine quand  $t \rightarrow +\infty$ ; si  $\alpha_1 > 0$  et  $x_1(t_0) \neq 0$ , la norme de  $(x_1(t), x_2(t))$  tend vers l'infini quand  $t \rightarrow +\infty$ ...

Adoptons maintenant une écriture matricielle. En posant  $x = (x_1, x_2)$ , le système de deux équations ci-dessus apparaît comme le cas particulier  $n = 2$  de l'équation différentielle dans  $\mathbb{R}^n$  suivante :

$$x'(t) = Dx(t), \quad \text{où } D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \text{ est diagonale.} \quad (3.2)$$

Cette équation étant en fait un système de  $n$  équations scalaires découplées, la solution est donnée par

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t_0)e^{\alpha_1(t-t_0)} \\ \vdots \\ x_n(t_0)e^{\alpha_n(t-t_0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1(t-t_0)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\alpha_n(t-t_0)} \end{pmatrix} x(t_0),$$

avec  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Nous verrons dans la section suivante que la matrice diagonale ci-dessus est l'exponentielle de la matrice  $D$  et nous la noterons donc  $e^{(t-t_0)D}$ .

Ainsi, pour les équations différentielles de la forme (3.2), nous avons une connaissance parfaite des solutions. Nous sommes par exemple en mesure d'analyser le comportement asymptotique des solutions en fonction de  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  et de la condition initiale  $x(t_0)$  :

- si tous les  $\alpha_i$  sont strictement négatifs, toute solution  $x(t)$  converge vers l'origine quand  $t \rightarrow +\infty$ ;
- si tous les  $\alpha_i$  sont négatifs ou nuls, toute solution  $x(t)$  est bornée quand  $t \rightarrow +\infty$ ;
- si au moins un des  $\alpha_i$  est strictement positif, alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = +\infty$  pour toute solution vérifiant  $x_i(t_0) \neq 0$ ;

— etc...

L'équation différentielle  $x'(t) = Dx(t)$  que nous venons de traiter est un cas très particulier, puisqu'il correspond à un système de  $n$  équations scalaires découplées. Beaucoup d'équations différentielles linéaires peuvent cependant s'y ramener. Considérons en effet le système  $x'(t) = Ax(t)$  avec  $A$  diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  : il existe donc une matrice inversible  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  et une matrice diagonale  $D \in M_n(\mathbb{R})$  telles que  $A = PDP^{-1}$ .

Remarquons maintenant que, si  $x(t)$  vérifie  $x'(t) = Ax(t)$ , alors  $y(t) = P^{-1}x(t)$  vérifie  $y'(t) = Dy(t)$ . Autrement dit, à un *changement de coordonnées près*, l'équation différentielle est un système de  $n$  équations scalaires découplées. Connaissant  $y(t_0) = P^{-1}x(t_0)$ , on obtient alors  $y(t) = e^{(t-t_0)D}y(t_0)$ , et

$$x(t) = Py(t) = Pe^{(t-t_0)D}y(t_0) = Pe^{(t-t_0)D}P^{-1}x(t_0).$$

On est donc encore capable de calculer les solutions de l'équation différentielle dans ce cas. Plus important, on voit que le comportement asymptotique des solutions est caractérisé par les éléments diagonaux de  $D$ , c'est-à-dire par les *valeurs propres* de  $A$ .

En résumé, cette première approche élémentaire fait apparaître les points clés que nous allons développer maintenant :

- les solutions se calculent à l'aide de l'exponentielle de matrice ;
- le comportement asymptotique des solutions est caractérisé par les valeurs propres de  $A$ .

## 3.2 Exponentielle de matrices

**Définition 3.1.** On appelle *exponentielle de matrice* l'application

$$\begin{aligned} \exp : M_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto \exp A = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \end{aligned} .$$

Notons que la série  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  converge normalement. En effet

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} < \infty,$$

où on a choisi pour  $\|\cdot\|$  une norme multiplicative sur  $M_n(\mathbb{K})$  (par exemple une norme d'opérateurs). L'application exponentielle est donc continue (elle est en fait  $C^\infty$ ). Rappelons ses propriétés principales (sans démonstrations).

**Proposition 3.1.**

1. Pour  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , l'application  $t \mapsto e^{tA}$  est dérivable et

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

2. Pour tout  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $\exp(A)$  est inversible et  $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$ .

3. Si  $A$  et  $B \in M_n(\mathbb{K})$  commutent, i.e.  $AB = BA$ , on a

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B).$$

4. Si  $P \in GL_n(\mathbb{K})$ , alors  $Pe^AP^{-1} = e^{PAP^{-1}}$ .

5. Si  $D$  est une matrice diagonale d'éléments diagonaux  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , alors  $e^D$  est diagonale d'éléments diagonaux  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ .

Nous pouvons maintenant résoudre l'équation (3.1).

**Théorème 3.2.** Soient  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $x_0 \in \mathbb{K}^n$ . L'unique solution de l'équation  $x'(t) = Ax(t)$  valant  $x_0$  en  $t_0$  est l'application  $x(\cdot)$  définie par

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

PREUVE.

▷ La première propriété de la proposition précédente implique

$$\frac{d}{dt} \left( e^{(t-t_0)A}x_0 \right) = \left( \frac{d}{dt} e^{(t-t_0)A} \right) x_0 = Ae^{(t-t_0)A}x_0.$$

La fonction  $x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0$  est donc solution de  $x'(t) = Ax(t)$ , et  $x(t_0) = x_0$  puisque  $e^{0A} = I$ .

Pour montrer l'unicité de la solution, considérons une autre solution  $y(t)$  valant  $x_0$  en  $t_0$  et formons le produit  $z(t) = e^{-(t-t_0)A}y(t)$ . En utilisant encore la proposition 3.1, on obtient

$$z'(t) = -Ae^{-(t-t_0)A}y(t) + e^{-(t-t_0)A}y'(t) = -Ae^{-(t-t_0)A}y(t) + e^{-(t-t_0)A}Ay(t) = 0,$$

car  $A$  et  $e^{tA}$  commutent. Donc  $z(t)$  est une constante, et puisque  $z(t_0) = x_0$ , on obtient  $y(t) = e^{(t-t_0)A}z(t_0) = e^{(t-t_0)A}x_0$ .

□

Ainsi, la résolution d'équations linéaires autonomes se ramène au calcul d'exponentielle de matrices. Remarquons en particulier que les deux derniers points de la proposition 3.1 permettent de retrouver le résultat de la section 3.1 : si  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{K}$ , c'est-à-dire

$$A = PDP^{-1}, \quad P \in GL_n(\mathbb{K}), \quad D \in M_n(\mathbb{K}) \text{ diagonale,}$$

alors  $e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$  et la solution de l'équation (3.1) est

$$x(t) = Pe^{(t-t_0)D}P^{-1}x(t_0).$$

Malheureusement toutes les matrices ne sont pas diagonalisables. La théorie de la réduction des endomorphismes permet cependant de mener à bien le calcul.

### 3.3 Calcul de l'exponentielle de matrices

Le but de cette section est de calculer l'exponentielle d'une matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  à un changement de base près, c'est-à-dire de calculer  $P^{-1}e^{tA}P$  pour un  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  bien choisi.

Nous mènerons d'abord ce calcul dans le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , pour les matrices à coefficients complexes. Nous montrerons ensuite comment en déduire le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

#### 3.3.1 a. Matrices à coefficients complexes

**Polynôme caractéristique.** Considérons une matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$  et notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  ses *valeurs propres*. Rappelons que ce sont les seuls nombres complexes pour lesquels l'équation

$$Av = \lambda_i v$$

admette une solution  $v \in \mathbb{C}^n$  *non nulle* (les  $v_i$  correspondants s'appellent des *vecteurs propres*). Les valeurs propres s'obtiennent également comme les racines du *polynôme caractéristique* de  $A$  :  $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ . Ce polynôme est donc de la forme

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{p_r},$$

où chaque entier  $p_i$  est strictement positif et  $p_1 + \cdots + p_r = n$  (le polynôme caractéristique étant de degré  $n$ ). On appelle  $p_i$  la *multiplicité algébrique* de la valeur propre  $\lambda_i$ .

Une propriété importante du polynôme caractéristique est qu'il s'annule en  $A$ .

**Théorème 3.3** (Cayley-Hamilton). *Toute matrice annule son polynôme caractéristique :*

$$P_A(A) = (A - \lambda_1 I)^{p_1} \cdots (A - \lambda_r I)^{p_r} = 0.$$

**Sous-espaces propres, sous-espaces caractéristiques.** À chaque valeur propre de  $A$  sont associés deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{C}^n$ . Le premier est le *sous-espace propre* :

$$\Pi_i \text{ ou } \Pi_{\lambda_i} = \ker_{\mathbb{C}}(A - \lambda_i I).$$

C'est l'ensemble des vecteurs propres associés à  $\lambda_i$ . L'entier  $e_i = \dim \Pi_i$  est appelé la *multiplicité géométrique* de la valeur propre  $\lambda_i$ .

Le deuxième est le *sous-espaces caractéristique* :

$$\Gamma_i \text{ ou } \Gamma_{\lambda_i} = \ker_{\mathbb{C}}(A - \lambda_i I)^{p_i}.$$

Il est clair que  $\Pi_i \subset \Gamma_i$ , mais ces deux espaces peuvent être différents. Le rôle des espaces caractéristiques est précisé dans le résultat suivant, que nous donnons sans démonstration.

**Théorème 3.4** (de décomposition des noyaux). *Avec les notations précédentes, on a la décomposition*

$$\mathbb{C}^n = \Gamma_1 \oplus \cdots \oplus \Gamma_r,$$

*et les propriétés suivantes :*

1.  $\dim \Gamma_i = p_i$  ;
2. *chacun des espaces  $\Gamma_i$  est invariant par  $A : x \in \Gamma_i \Rightarrow Ax \in \Gamma_i$  ;*
3. *la restriction  $A|_{\Gamma_i}$  de  $A$  à  $\Gamma_i$  s'écrit*

$$A|_{\Gamma_i} = \lambda_i I_{\Gamma_i} + N_i,$$

*où  $I_{\Gamma_i}$  désigne l'identité de  $\Gamma_i$  et  $N_i \in \text{End}(\Gamma_i)$  est nilpotent d'ordre  $\leq p_i$ , i.e.  $N_i^{p_i} = 0$ .*

Ce résultat appelle un certain nombre de commentaires.

- Rappelons que  $\text{End}(\Gamma_i)$  désigne l'ensemble des *endomorphismes* de  $\Gamma_i$ , c'est-à-dire des applications linéaires de  $\Gamma_i$  dans lui-même. Dire que  $\Gamma_i$  est invariant par  $A$  est équivalent à dire que  $A|_{\Gamma_i}$  appartient à  $\text{End}(\Gamma_i)$ .
- L'opérateur  $N_i$  est défini comme  $N_i = (A - \lambda_i I)|_{\Gamma_i}$ . Le fait que  $N_i$  soit nilpotent d'ordre  $\leq p_i$  n'est donc rien d'autre que la définition de  $\Gamma_i$ . Il est en revanche possible que l'ordre exact de nilpotence de  $N_i$ , c'est-à-dire le plus petit entier  $m_i \leq p_i$  tel que  $N_i^{m_i} = 0$ , soit plus petit que  $p_i$ . Dans ce cas, on a

$$\ker(A - \lambda_i I)^{p_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{m_i} \supsetneq \ker(A - \lambda_i I)^{m_i - 1}.$$

- Une matrice est *diagonalisable* si il existe une base de  $\mathbb{C}^n$  formée de vecteurs propres, ce qui équivaut à

$$\mathbb{C}^n = \Pi_1 \oplus \cdots \oplus \Pi_r.$$

D'après le théorème de décomposition des noyaux, ceci n'est possible que si  $\Pi_i = \Gamma_i$  pour tout  $i$ . Autrement dit :

*A est diagonalisable si et seulement si pour toute valeur propre les multiplicités algébrique et géométrique coïncident, i.e.  $\dim \Pi_i = p_i$  pour  $i = 1, \dots, r$ .*

**Réduction de Jordan dans  $\mathbb{C}^n$ .** Choisissons une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{C}^n$  formée de la réunion d'une base de  $\Gamma_1$ , d'une base de  $\Gamma_2$ , ..., d'une base de  $\Gamma_r$ , et notons  $P$  la matrice de passage de cette base à la base canonique. D'après le théorème de décomposition des noyaux, l'application linéaire associée à  $A$  a pour matrice dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$P^{-1}AP = D + N,$$

où  $D$  est la matrice diagonale ayant pour éléments diagonaux  $\lambda_1$  ( $p_1$  fois), ...,  $\lambda_r$  ( $p_r$  fois), et  $N$  est la matrice nilpotente qui s'écrit par blocs

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_r \end{pmatrix}.$$

Il est en fait possible de choisir la base  $\mathcal{B}$  de façon à mettre la matrice nilpotente  $N$  sous une forme relativement simple. On aboutit ainsi à la réduction de Jordan.

**Théorème 3.5** (de Jordan). *Pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que  $P^{-1}AP$  s'écrit sous forme de matrice diagonale par bloc*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

où chaque  $J_i$  est une matrice ( $p_i \times p_i$ ) de la forme

$$J_i = \begin{pmatrix} J_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{i,e_i} \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad J_{i,k} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

et  $e_i = \dim \ker(A - \lambda_i I)$  est la multiplicité géométrique de  $\lambda_i$ .

On appelle la matrice  $J = P^{-1}AP$  la *forme réduite de Jordan* de  $A$  et les matrices  $J_i$  des *blocs de Jordan*.

*Remarques.*

- Pour chaque  $i$ , la matrice  $J_i$  représente l'application linéaire  $A|_{\Gamma_i}$ , ce qui implique  $J_i \in \text{End}(\Gamma_i)$ .

- Les matrices  $J_{i,k}$  sont des matrices carrées dont la dimension  $\dim(J_{i,k}) \leq p_i$  dépend de  $i$  et  $k$ . Dans le cas particulier où les multiplicités algébrique et géométrique de  $\lambda_i$  coïncident (*i.e.*  $e_i = p_i$ ), la dimension  $\dim(J_{i,k})$  est égale à 1 pour tout  $k$ . Chaque bloc  $J_{i,k}$  est alors réduit au scalaire  $\lambda_i$  et  $J_i = \lambda_i I_{p_i}$ .
- D'après la remarque précédente, si pour chaque valeur propre les multiplicités algébrique et géométrique coïncident, la forme réduite de Jordan est diagonale. Ainsi la réduction de Jordan généralise la diagonalisation. Insistons cependant sur le fait que toute matrice de  $M_n(\mathbb{C})$  admet une réduction de Jordan, mais n'est pas forcément diagonalisable.

**Calcul de l'exponentielle.** La réduction de Jordan permet de calculer  $e^{tA}$  à conjugaison près. En effet, commençons par le calcul de l'exponentielle d'un bloc  $J_{i,k}$ . Notons  $n_{i,k} = \dim(J_{i,k})$  la dimension de ce bloc et écrivons-le  $J_{i,k} = \lambda_i I + N_{i,k}$ , où  $N_{i,k}$  est la matrice ayant des 0 sur la diagonale et des 1 juste au-dessus. Comme  $\lambda_i I$  et  $N_{i,k}$  commutent,

$$e^{tJ_{i,k}} = e^{t\lambda_i I} e^{tN_{i,k}} = e^{t\lambda_i} e^{tN_{i,k}}.$$

De plus,  $N_{i,k}$  étant nilpotente d'ordre  $n_{i,k}$ , on a :

$$e^{tN_{i,k}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(tN_{i,k})^l}{l!} = \sum_{l=0}^{n_{i,k}-1} \frac{(tN_{i,k})^l}{l!} = \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{n_{i,k}-1}}{(n_{i,k}-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, d'après les propriétés de l'exponentielle de matrice (proposition 3.1), on a  $e^{tA} = e^{tPJP^{-1}} = Pe^{tJ}P^{-1}$ , ce qui donne finalement l'expression de l'exponentielle de  $tA$  :

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{tJ_{1,1}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{tJ_{r,r}} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} P^{-1}, \quad (3.5)$$

avec  $e^{tJ_{i,k}} = e^{t\lambda_i} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{n_{i,k}-1}}{(n_{i,k}-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$

### 3.3.2 b. Matrices à coefficients réels

Considérons maintenant une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , à coefficients *réels*. On peut bien entendu considérer  $A$  comme une matrice de  $M_n(\mathbb{C})$ ; tout ce que nous venons de voir pour les matrices à coefficients complexes s'applique donc.

Désignons les valeurs propres réelles de  $A$  par  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ , et ses valeurs propres non réelles par  $\lambda_{s+1}, \bar{\lambda}_{s+1}, \dots, \lambda_q, \bar{\lambda}_q$  (avec  $2q - s = r$ ). Le polynôme caractéristique de  $A$  est donc le polynôme à coefficients réels

$$P_A(\lambda) = \prod_{i=1}^s (\lambda - \lambda_i)^{p_i} \prod_{i=s+1}^q [(\lambda - \lambda_i)(\lambda - \bar{\lambda}_i)]^{p_i}.$$

Les sous-espaces vectoriels  $\Gamma_{\lambda_i} = \ker_{\mathbb{C}}(A - \lambda_i I)^{p_i}$  de  $\mathbb{C}^n$  sont maintenant appelés les sous-espaces caractéristiques *complexes*.

*Remarque.* Rappelons les liens qui existent entre les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{C}^n$ , qui sont des  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels, et ceux de  $\mathbb{R}^n$ , qui sont des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. On considère  $\mathbb{R}^n$  comme un sous-ensemble de  $\mathbb{C}^n$  et, pour un sous-espace vectoriel  $\Gamma$  de  $\mathbb{C}^n$ , on note  $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$  l'ensemble des vecteurs  $v \in \Gamma$  qui sont réels. Il est facile de vérifier qu'un tel ensemble  $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . De plus, si  $\Gamma$  est stable par conjugaison (*i.e.*  $v \in \Gamma \Rightarrow \bar{v} \in \Gamma$ ), alors  $\Gamma$  et  $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$  ont même dimension en tant que sous-espaces respectivement de  $\mathbb{C}^n$  et de  $\mathbb{R}^n$  (en fait, dans ce cas,  $\Gamma$  est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients complexes des éléments de  $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$ ; en conséquence, toute base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$  est également une base du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\Gamma$ ).

Définissons maintenant les *sous-espaces caractéristiques réels* de  $A$  comme les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned} E_i &= \Gamma_{\lambda_i} \cap \mathbb{R}^n, & 1 \leq i \leq s \\ E_i &= (\Gamma_{\lambda_i} \oplus \Gamma_{\bar{\lambda}_i}) \cap \mathbb{R}^n, & s+1 \leq i \leq q. \end{aligned}$$

Remarquons alors que  $(A - \lambda_i I)^{p_i} v = 0$  implique  $(A - \bar{\lambda}_i I)^{p_i} \bar{v} = 0$ , ce qui signifie que  $\Gamma_{\lambda_i}$  pour  $\lambda_i$  réel et  $\Gamma_{\lambda_i} \oplus \Gamma_{\bar{\lambda}_i}$  pour  $\lambda_i$  non réel sont stables par conjugaison. D'après la remarque précédente et le théorème de décomposition des noyaux dans  $\mathbb{C}^n$ , on a la décomposition

$$\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_q,$$

chaque sous-espace  $E_i$  étant invariant par  $A$ . À partir de cette décomposition, nous allons donner ci-dessous une forme réduite de Jordan réelle de  $A$ . Cette forme réduite n'est cependant pas indispensable à l'étude des équations différentielles : nous verrons dans la section suivante que les solutions de l'équation (3.1) dans  $\mathbb{R}^n$  peuvent se déduire directement des solutions dans  $\mathbb{C}^n$ .

**\*Réduction de Jordan dans  $\mathbb{R}^n$ .** Donner une forme réduite de  $A \in M_n(\mathbb{R})$  consiste à trouver pour chaque sous-espace caractéristique une base dans laquelle l'application linéaire associée à  $A$  a une expression simple (c'est ce que nous avons fait pour les matrices à coefficients complexes). Considérons donc un des sous-espaces caractéristiques réels  $E_k$  de  $A$ .

- Si  $\lambda_k$  est réelle, *i.e.*  $1 \leq k \leq s$  : dans ce cas  $E_i = \ker_{\mathbb{R}}(A - \lambda_k I)^{p_k}$  et la restriction de  $A$  à  $E_k$  s'écrit simplement

$$A|_{E_k} = \lambda_k I|_{E_k} + N_k, \quad \text{où } N_k \text{ nilpotente.}$$

On peut alors montrer comme dans le cas complexe que  $A|_{E_k}$  est conjuguée au bloc de Jordan  $J_k$ .

- Si  $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$  n'est pas réelle, *i.e.*  $s+1 \leq k \leq q$  : choisissons une base  $v_1, \dots, v_{p_k}$  de  $\Gamma_k$  dans laquelle  $A|_{\Gamma_k}$  se met sous forme d'un bloc de Jordan  $J_k$ , c'est-à-dire, pour  $j = 1, \dots, p_k$ ,

$$Av_j = \lambda_k v_j + \delta_j v_{j-1}, \quad \text{où } \delta_j = (J_k)_{j-1,j} = 0 \text{ ou } 1,$$

en posant  $v_0 = 0$ . Par conjugaison, il est clair que  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{p_k}$  est une base de  $\Gamma_{\bar{\lambda}_k}$ . Pour  $j = 1, \dots, p_k$ , posons  $v_j = a_j + ib_j$ , avec  $a_j, b_j \in \mathbb{R}^n$ . Les vecteurs  $(a_1, b_1, \dots, a_{p_k}, b_{p_k})$  forment alors une base de  $E_k$ . En effet, les  $a_j = \frac{1}{2}(v_j + \bar{v}_j)$  et  $b_j = \frac{i}{2}(\bar{v}_j - v_j)$  appartiennent à  $\Gamma_{\lambda_k} \oplus \Gamma_{\bar{\lambda}_k}$  et l'engendrent en tant que  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel puisqu'ils engendrent la base des  $v_j, \bar{v}_j$  : ils forment donc une famille génératrice à  $2p_k$  éléments du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E_k$  de dimension  $2p_k$  éléments, c'est-à-dire une base.

De plus, en identifiant les parties réelles et imaginaires dans l'expression

$$A(a_j + ib_j) = (\alpha_k + i\beta_k)(a_j + ib_j) + \delta_j(a_{j-1} + ib_{j-1}),$$

on obtient

$$A \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \end{bmatrix} = C_k \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \end{bmatrix} + \delta_j \begin{bmatrix} a_{j-1} \\ b_{j-1} \end{bmatrix} \quad \text{où } C_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & -\beta_k \\ \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}.$$

La restriction de  $A$  à  $E_k$  est donc conjuguée dans la base  $(a_1, b_1, \dots, a_{p_k}, b_{p_k})$  à la matrice

$$J'_k = \begin{pmatrix} C_k & \delta_2 I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \delta_{p_k} I_2 \\ & & & C_k \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi la réduction de Jordan dans  $\mathbb{R}^n$  de  $A$ .

**Théorème 3.6.** *Pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , il existe  $Q \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que  $Q^{-1}AQ$  s'écrit sous forme de matrice diagonale par bloc  $J'$ , d'éléments diagonaux  $J_1, \dots, J_s, J'_{s+1}, \dots, J'_q$ , où, pour  $i = s+1, \dots, q$ , chaque  $J'_i$  est une matrice  $(2p_i \times 2p_i)$  de la forme*

$$J'_i = \begin{pmatrix} J'_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & J'_{i,2e_i} \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad J'_{i,k} = \begin{pmatrix} C_i & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ & & & C_i \end{pmatrix}$$

et, pour  $i = 1, \dots, s$ , les matrices  $J_i$  sont celles données dans le théorème 3.5.

Le calcul de l'exponentielle ne pose alors aucun problème, il suffit de savoir calculer  $e^{tC_i}$ . Écrivons  $C_i$  comme la somme de deux matrices qui commutent

$$C_i = \alpha_i I_2 + \beta_i B, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et donc son exponentielle comme un produit

$$e^{tC_i} = e^{\alpha_i t} e^{\beta_i t B}.$$

Remarquons que la matrice  $B$  est de carré égal à  $-I_2$ , ce qui implique  $B^{2p} = (-1)^p I_2$  et  $B^{2p+1} = (-1)^p B$ , soit

$$e^{sB} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (sB)^k = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} (-1)^p s^{2p} I_2 + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)!} (-1)^p s^{2p+1} B = \cos(s) I_2 + \sin(s) B.$$

On obtient ainsi l'exponentielle de  $C_i$  :

$$e^{tC_i} = e^{\alpha_i t} \begin{pmatrix} \cos(\beta_i t) & -\sin(\beta_i t) \\ \sin(\beta_i t) & \cos(\beta_i t) \end{pmatrix}.$$

## 3.4 Forme des solutions

Grâce au calcul de l'exponentielle que nous venons d'effectuer, nous sommes maintenant en mesure de préciser le théorème 3.2. Donnons d'abord la forme de la solution générale dans  $\mathbb{C}^n$ , qui s'obtient directement à partir de l'expression (3.5) de  $e^{tA}$ .

**Théorème 3.7.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Toute solution de  $x'(t) = Ax(t)$  dans  $\mathbb{C}^n$  s'écrit sous la forme

$$x(t) = \sum_{1 \leq i \leq r} e^{t\lambda_i} \left( \sum_{0 \leq k \leq m_i - 1} t^k v_{i,k} \right), \quad \text{où } v_{i,k} \in \Gamma_i, \quad (3.7)$$

avec  $m_i = \max_{1 \leq k \leq e_i} \dim(J_{i,k})$ .

*Remarques.*

- Le terme en facteur de  $e^{t\lambda_i}$  est polynômial en  $t$  quand  $m_i > 1$ , et constant quand  $m_i = 1$ . Rappelons que ce dernier cas a lieu si et seulement si les multiplicités algébrique et géométrique de  $\lambda_i$  coïncident.
- Il est également important de noter la dépendance de  $x(t)$  par rapport à la condition initiale  $x(0)$  dans la décomposition précédente. Si  $x(0)$  s'écrit comme  $x(0) = v_1 + \cdots + v_r$  dans  $\mathbb{C}^n = \Gamma_1 \oplus \cdots \oplus \Gamma_r$ , alors

$$v_{i,k} = \frac{1}{k!} N^k v_i,$$

où  $N$  est la matrice nilpotente de la décomposition  $D + N$  de  $P^{-1}AP$ . En particulier,  $v_i = 0$  si et seulement si tous les vecteurs  $v_{i,k}$  sont nuls. Ceci est en fait une conséquence de l'invariance des sous-espaces  $\Gamma_i$  par  $A$ .

Considérons maintenant une matrice  $A$  à coefficients réels et une solution  $x(\cdot)$  dans  $\mathbb{R}^n$  de  $x' = Ax$ , dont la condition initiale est  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ . On peut bien entendu considérer  $A$  comme une matrice à coefficients complexes et  $x(\cdot) = x(\cdot) + i0$  comme la solution dans  $\mathbb{C}^n$  de  $x' = Ax$  ayant pour condition initiale  $x(0) + i0$ . L'expression de  $x(\cdot)$  est donc donnée par la formule (3.7). Puisque cette solution est réelle, elle est en fait égale à la partie réelle de la formule (3.7), la partie imaginaire devant être nulle. On obtient ainsi la forme générale suivante pour les solutions de  $x' = Ax$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 3.8.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Toute solution de  $x'(t) = Ax(t)$  dans  $\mathbb{R}^n$  s'écrit sous la forme

$$x(t) = \sum_{1 \leq i \leq q} e^{t\alpha_i} \left( \sum_{0 \leq k \leq m_i - 1} t^k (\cos(\beta_i t) a_{i,k} + \sin(\beta_i t) b_{i,k}) \right), \quad (3.9)$$

où  $\alpha_i = \Re(\lambda_i)$ ,  $\beta_i = \Im(\lambda_i)$  et les vecteurs  $a_{i,k}, b_{i,k}$  appartiennent à  $E_i$ .

*Remarque.* Comme dans le théorème 3.7, les vecteurs  $a_{i,k}, b_{i,k}$  dépendent uniquement de la condition initiale  $x(0)$ . Si  $x(0)$  s'écrit comme  $x(0) = u_1 + \cdots + u_q$  dans  $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$ , alors  $u_i = 0$  si et seulement si tous les vecteurs  $a_{i,k}$  et  $b_{i,k}$  sont nuls.

### 3.4.1 Comportement asymptotique.

Les théorèmes 3.7 et 3.8 donnent toutes les informations que l'on peut souhaiter sur l'équation différentielle, généralisant les résultats de la section 3.1 sur les équations scalaires et les systèmes d'équations découplées. On constate en particulier que le comportement quand  $t$  tend vers l'infini des solutions  $x(t)$  de  $x'(t) = Ax(t)$  dépend essentiellement des signes des parties réelles des valeurs propres  $\lambda_i$  de  $A$ . Plus précisément, on peut décomposer le comportement des composantes de  $x(t)$  sur chaque sous-espace caractéristique (on suppose ici  $A$  réelle) :

- si  $\Re(\lambda_i) < 0$  la projection sur  $E_i$  de  $x(t)$  s'annule quand  $t$  tend vers  $+\infty$  et croît de façon au moins exponentielle en  $-\infty$  ;
- si  $\Re(\lambda_i) > 0$ , c'est l'inverse, la projection sur  $E_i$  de  $x(t)$  croît de façon au moins exponentielle en  $+\infty$  et s'annule quand  $t$  tend vers  $-\infty$  ;
- si  $\Re(\lambda_i) = 0$ , la composante sur  $E_i$  de  $x(t)$  croît de façon polynômiale en  $\pm\infty$  quand  $\dim \Pi_i < p_i$ , et est bornée pour  $t \in \mathbb{R}$  quand  $\dim \Pi_i = p_i$ .

Il est commode de regrouper les sous-espaces caractéristiques en fonction du signe de la partie réelle des valeurs propres correspondantes. Nous définissons ainsi, pour  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \text{— l'espace } stable : \quad & E^s = \left[ \bigoplus_{\Re(\lambda_i) < 0} \Gamma_i \right] \cap \mathbb{R}^n = \bigoplus_{\Re(\lambda_i) < 0} E_i, \\ \text{— l'espace } instable : \quad & E^u = \left[ \bigoplus_{\Re(\lambda_i) > 0} \Gamma_i \right] \cap \mathbb{R}^n = \bigoplus_{\Re(\lambda_i) > 0} E_i, \\ \text{— l'espace } indifférent : \quad & E^c = \left[ \bigoplus_{\Re(\lambda_i) = 0} \Gamma_i \right] \cap \mathbb{R}^n = \bigoplus_{\Re(\lambda_i) = 0} E_i, \end{aligned}$$

si bien que  $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$ . De même, pour  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , les espaces complexes *stable*, *instable* et *indifférent* sont définis respectivement comme

$$\Gamma^s = \bigoplus_{\Re(\lambda_i) < 0} \Gamma_i, \quad \Gamma^u = \bigoplus_{\Re(\lambda_i) > 0} \Gamma_i, \quad \Gamma^c = \bigoplus_{\Re(\lambda_i) = 0} \Gamma_i,$$

et on a la décomposition  $\mathbb{C}^n = \Gamma^s \oplus \Gamma^u \oplus \Gamma^c$ .

D'après le théorème de décomposition des noyaux, ces espaces ont la particularité d'être invariants par  $e^{tA}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :  $e^{tA}E^s \subset E^s$ ,  $e^{tA}E^u \subset E^u$ , etc... Ce qui entraîne que, si une solution  $x(\cdot)$  de  $x'(t) = Ax(t)$  vérifie par exemple  $x(0) \in E^s$ , alors  $x(t) \in E^s$  pour tout  $t$  ; si  $x(0) \in E^c$ , alors  $x(t) \in E^c$  pour tout  $t$ , etc...

Les espaces stable, instable et indifférent correspondent chacun à un certain type de comportement asymptotique des solutions. Nous résumons ces comportements dans le théorème suivant, dont la démonstration est laissée en exercice (utiliser soit la forme générale des solutions, soit directement la réduction de Jordan).

**Théorème 3.9.** Soit  $A$  une matrice ( $n \times n$ ) réelle (resp. complexe). Notons  $x(\cdot)$  les solutions dans  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{C}^n$ ) de l'équation différentielle  $x'(t) = Ax(t)$ . Alors

—  $E^s$  (resp.  $\Gamma^s$ ) est l'ensemble des  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  (resp.  $x(0) \in \mathbb{C}^n$ ) pour lesquels

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0;$$

—  $E^u$  (resp.  $\Gamma^u$ ) est l'ensemble des  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  (resp.  $x(0) \in \mathbb{C}^n$ ) pour lesquels

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|x(t)\| = 0;$$

—  $E^c$  (resp.  $\Gamma^c$ ) est l'ensemble des  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  (resp.  $x(0) \in \mathbb{C}^n$ ) pour lesquels il existe un entier  $M \geq 0$  et une constante  $C > 0$  tels que, pour  $|t|$  suffisamment grand,

$$C^{-1} \|x(0)\| \leq \|x(t)\| \leq C |t|^M \|x(0)\|.$$

En outre, pour  $0 < \alpha < \min_{\Re(\lambda_i) \neq 0} |\Re(\lambda_i)|$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que :

— si  $x(0) \in E^s$  (ou  $\Gamma^s$ ), alors, pour tout  $t > 0$  assez grand,

$$\|x(t)\| \leq C e^{-\alpha t} \|x(0)\|, \quad \|x(-t)\| \geq C^{-1} e^{\alpha t} \|x(0)\|;$$

— si  $x(0) \in E^u$  (ou  $\Gamma^u$ ), alors, pour tout  $t > 0$  assez grand,

$$\|x(t)\| \geq C^{-1} e^{\alpha t} \|x(0)\|, \quad \|x(-t)\| \leq C e^{-\alpha t} \|x(0)\|.$$

*Remarque.* Dans la caractérisation de  $E^c$ , on peut prendre  $M = 0$  si et seulement si  $A$  est diagonalisable (puisque dans ce cas, pour toute valeur propre, multiplicités algébrique et géométrique coïncident).

Pour obtenir le comportement asymptotique d'une solution particulière  $x(\cdot)$ , il suffit donc de décomposer sa condition initiale  $x(0)$  en  $x^s(0) + x^u(0) + x^c(0)$  dans  $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$ . On sait alors que la décomposition de  $x(t)$  est  $x(t) = x^s(t) + x^u(t) + x^c(t)$ , où  $x^s(\cdot)$  (resp.  $x^u(\cdot)$ ,  $x^c(\cdot)$ ) est la solution de  $x'(t) = Ax(t)$  ayant  $x^s(0)$  (resp.  $x^u(0)$ ,  $x^c(0)$ ) pour condition initiale. En particulier, si on s'intéresse aux temps positifs, on a les critères suivants :

- si  $x^u(0) \neq 0$ , alors  $\|x(t)\|$  tend vers l'infini quand  $t \rightarrow +\infty$  ;
- si  $x^c(0) \neq 0$ , alors  $\|x(t)\|$  ne tend pas vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$  (mais  $\|x(t)\|$  ne tend pas forcément vers l'infini).

### 3.4.2 Cas d'une matrice diagonalisable.

Considérons le cas particulier d'une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  (on dit aussi *semi-simple*). Comme nous l'avons vu dans la section 3.3, ceci signifie que  $A$  satisfait les conditions suivantes, qui sont équivalentes entre elles (nous utilisons les notations de la section 3.3) :

- il existe une base de  $\mathbb{C}^n$  formée de vecteurs propres de  $A$  ;
- $\mathbb{C}^n = \Pi_1 \oplus \cdots \oplus \Pi_r$ , où  $\Pi_i = \ker_{\mathbb{C}}(A - \lambda_i I) \subset \mathbb{C}^n$  est le sous-espace propre associé à  $\lambda_i$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sont les valeurs propres (complexes) de  $A$  ;
- pour toute valeur propre  $\lambda_i$ , le sous-espace caractéristique (complexe) est égal au sous-espace propre :  $\Gamma_i = \Pi_i$  ;
- pour toute valeur propre, les multiplicités géométrique et algébrique coïncident :  $\dim \Pi_i = p_i$  pour  $i = 1, \dots, r$  ;
- dans la forme réduite de Jordan complexe de la matrice  $A$ , tous les blocs de Jordan sont des matrices  $1 \times 1$  :  $J_{i,k} = (\lambda_i)$ .

Ce cas est en pratique très important, puisque l'ensemble des matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  diagonalisables dans  $\mathbb{C}$  contient un ensemble ouvert et dense dans  $M_n(\mathbb{R})$ . Autrement dit, être diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  est une propriété générique sur  $M_n(\mathbb{R})$ .

Considérons donc une telle matrice  $A$ . La forme générale des solutions de  $x' = Ax$  donnée par le théorème 3.8 se simplifie : tous les termes polynômiaux en  $t$  disparaissent, seuls restent les termes exponentiels et trigonométriques.

**Corollaire 3.10.** *Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ . Toute solution de  $x'(t) = Ax(t)$  dans  $\mathbb{R}^n$  s'écrit sous la forme*

$$x(t) = \sum_{1 \leq j \leq q} e^{t\alpha_j} (\cos(\beta_j t) a_j + \sin(\beta_j t) b_j),$$

où  $\alpha_j = \Re(\lambda_j)$ ,  $\beta_j = \Im(\lambda_j)$  et les vecteurs  $a_j$  et  $b_j \in \mathbb{R}^n$  sont tels que  $a_j + ib_j$  est un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda_j$  (i.e.  $a_j + ib_j \in \Pi_j$ ).

Les sous-espaces stables, instables et indifférents s'écrivent maintenant en fonction des sous-espaces propres (puisque ceux-ci sont égaux aux sous-espaces caractéristiques complexes) :

$$E^s = \left[ \bigoplus_{\Re(\lambda_i) < 0} \Pi_i \right] \cap \mathbb{R}^n, \quad E^u = \left[ \bigoplus_{\Re(\lambda_i) > 0} \Pi_i \right] \cap \mathbb{R}^n, \quad E^c = \left[ \bigoplus_{\Re(\lambda_i) = 0} \Pi_i \right] \cap \mathbb{R}^n.$$

La caractérisation dynamique de ces espaces résulte du théorème 3.9.

**Corollaire 3.11.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ . Notons  $x(\cdot)$  les solutions dans  $\mathbb{R}^n$  de l'équation différentielle  $x'(t) = Ax(t)$ . Alors

- $E^s$  est l'ensemble des conditions initiales  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  correspondant à des solutions  $x(t)$  qui tendent exponentiellement vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$  ;
- $E^u$  est l'ensemble des conditions initiales  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  correspondant à des solutions  $x(t)$  qui tendent exponentiellement vers 0 quand  $t \rightarrow -\infty$  ;
- $E^c$  est l'ensemble des conditions initiales  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  correspondant à des solutions  $x(t)$  périodiques, donc bornées sur  $\mathbb{R}$ .

La seule différence par rapport au cas général concerne l'espace  $E^c$  : alors que dans le cas général le comportement asymptotique des solutions dans  $E^c$  était indéterminé (d'où le nom d'espace 'indifférent' <sup>a</sup>), on sait ici que toutes les solutions dans  $E^c$  sont bornées.

# Chapitre 4

## Stabilité des équilibres : linéarisation et fonctions de Lyapunov

### 4.1 Flots et portraits de phase : cas autonome

Considérons à nouveau une équation différentielle autonome

$$x'(t) = f(x(t)), \quad (1.12)$$

où le champ de vecteurs  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est supposé de classe  $C^1$ . Une des spécificités de cette équation est qu'elle ne dépend pas explicitement du temps (d'où le qualificatif autonome). En particulier, les solutions sont invariantes par translation du temps : si  $x(\cdot)$  est solution,  $x(t_0 + \cdot)$  aussi.

**Proposition 4.1.** *Soit  $x(\cdot) : ]t_-, t_+[ \rightarrow \Omega$  une solution maximale de (1.12) et  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Alors  $\bar{x} : t \mapsto x(t + t_0)$ , définie sur  $]t_- - t_0, t_+ - t_0[$ , est également une solution maximale de (1.12).*

Ainsi le temps n'a pas de rôle intrinsèque ici et on pourra se limiter aux données initiales en  $t = 0$ . Pour un point  $x \in \Omega$ , notons  $\phi(\cdot, x)$  la solution maximale de (1.12) valant  $x$  en  $t = 0$  et  $I_x = ]t_-, t_+[$  son intervalle de définition. Autrement dit,  $\phi(\cdot, x)$  est la solution du système

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, x) = f(\phi(t, x)), \\ \phi(0, x) = x, \end{cases} \quad \forall t \in I_x.$$

**Définition 4.1.** L'application  $(t, x) \mapsto \phi(t, x)$  est appelée le *flot* du champ de vecteurs  $f$  (ou de l'équation  $x' = f(x)$ ).

Par définition, l'application partielle à  $x$  fixé,  $t \mapsto \phi(t, x)$ , est une solution maximale de l'équation. Pour une étude qualitative de l'équation différentielle, il est important d'étudier plutôt l'autre application partielle,  $\phi_t : x \mapsto \phi(t, x)$ , pour  $t$  fixé. De façon imagée,  $\phi_t(x)$  est la position à l'instant  $t$  d'un corps transporté par l'équation différentielle qui se trouvait à la position  $x$  en  $t = 0$ .

*Exemple.* Si  $f$  est linéaire, i.e.  $f(x) = Ax$ ,  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , le flot est donné par l'exponentielle de  $A$  :

$$\phi_t(x) = e^{tA}x, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Ainsi le flot est une généralisation de l'exponentielle de matrice. Il possède des propriétés similaires.

**Proposition 4.2** (formule du flot). *Si  $t_1 \in I_x$  et  $t_2 \in I_{\phi_{t_1}(x)}$ , alors  $t_1 + t_2 \in I_x$  et*

$$\phi_{t_1+t_2}(x) = \phi_{t_2}(\phi_{t_1}(x)).$$

*En particulier, si  $t \in I_x$ ,*

$$\phi_{-t}(\phi_t(x)) = x$$

PREUVE.

▷ D'après la proposition sur l'invariance par translation du temps,  $t \mapsto \phi_{t_1+t}(x)$  est la solution maximale valant  $\phi_{t_1}(x)$  en  $t = 0$ , ce qui est la définition de  $t \mapsto \phi_t(\phi_{t_1}(x))$ . □

*Remarque.* La formule du flot peut aussi se lire de la façon suivante : si  $x(\cdot)$  est une solution de (1.12), alors

$$x(t) = \phi_{t-t_0}(x(t_0))$$

pour tous  $t_0$  et  $t$  dans l'intervalle de définition de  $x(\cdot)$ .

Le domaine de définition du flot est l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega : t \in I_x\}.$$

Pour obtenir des propriétés intéressantes sur le flot (continuité, différentiabilité), il est nécessaire de montrer d'abord que son domaine de définition  $\mathcal{D}$  est un ouvert de  $\mathbb{R} \times \Omega$ . Nous le verrons dans la section suivante.

Il y a cependant déjà un cas où cela est évident : si  $f$  est un champ de vecteurs complet sur  $\Omega$ , c'est-à-dire si  $I_x = \mathbb{R}$  pour tout  $x \in \Omega$ , le domaine de définition du flot est  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \Omega$ . On peut alors réécrire les propriétés du flot de façon globale : pour tous  $t, s \in \mathbb{R}$ ,

1.  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ ;

2.  $\phi_{-t} \circ \phi_t = \text{id}$ ;
3.  $\phi_0 = \text{id}$ ;
4.  $\frac{\partial}{\partial t} \phi_t = f \circ \phi_t$ .

Les trois premières propriétés montrent en particulier que  $\phi_t$  obéit à une loi de groupe.

### 4.1.1 Orbites et portraits de phase

**Définition 4.2.** On appelle *orbite* d'un point  $x_0 \in \Omega$  (ou trajectoire passant par  $x_0$ ) l'ensemble

$$\mathcal{O}_{x_0} = \{\phi_t(x_0) : t \in I_{x_0}\}.$$

Autrement dit, l'orbite de  $x_0$  est la courbe tracée sur  $\mathbb{R}^n$  par la solution maximale de l'équation (1.12) passant par  $x_0$  en  $t = 0$ .

La propriété d'invariance par translation du temps implique que, pour tout point  $x \in \mathcal{O}_{x_0}$ , on a  $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_{x_0}$ . En effet, dans ce cas, il existe un instant  $t_0$  tel que  $x = \phi_{t_0}(x_0)$ . Tout point  $y$  de  $\mathcal{O}_x$  s'écrit alors  $y = \phi_t(x) = \phi_{t+t_0}(x_0)$ , c'est-à-dire  $y \in \mathcal{O}_{x_0}$ . En particulier, ceci implique que *deux orbites distinctes ne peuvent pas se croiser*. Chaque point de  $\Omega$  appartient donc à une et une seule orbite.

La partition de  $\Omega$  en orbites s'appelle le *portrait de phase* du champ de vecteurs. On y trouve trois sortes d'orbites :

- des points, *i.e.*  $\mathcal{O}_{x_0} = \{x_0\}$  : un tel point vérifie nécessairement  $f(x_0) = 0$ . C'est ce que l'on appelle un *point d'équilibre* (voir Définition 4.6). Remarquer qu'un point d'équilibre correspond à un point fixe de  $\phi_t$  pour tout  $t$  :  $\phi_t(x_0) = x_0$ .
- des courbes fermées : il existe alors un point  $x$  dans l'orbite et un temps  $T > 0$  tels que  $\phi_T(x) = x$ . Ceci implique  $\phi_{t+T}(x) = \phi_t(x)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , c'est-à-dire que la solution maximale  $\phi(\cdot, x)$  est  $T$ -périodique. On parlera dans ce cas d'*orbite périodique*.
- des courbes ouvertes : il n'y a alors aucun point double, *i.e.* si  $t \neq s$ ,  $\phi_t(x) \neq \phi_s(x)$ .

On porte habituellement sur le dessin d'un portrait de phase le sens de parcours des orbites.

*Exemple.* Considérons le champ de vecteurs linéaire  $f(x) = Ax$  dans  $\mathbb{R}^2$ , et supposons que la matrice  $A \in M_2(\mathbb{R})$  a deux valeurs propres réelles et distinctes  $\lambda_1 < \lambda_2$ . L'étude réalisée dans la section 3.4 permet de déterminer la forme du portrait de phase en fonction de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Nous avons représenté les différentes possibilités dans la figure 4.1, où nous avons noté  $E_1$  et  $E_2$  les sous-espaces propres associés à  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

Les points d'équilibre et les orbites périodiques sont des exemples de sous-ensembles invariants dont la définition est donnée ci-dessous.

**Définition 4.3.** Soit  $A$  un sous-ensemble de l'espace d'état  $\Omega$ . On dit que  $A$  est *invariant* (respectivement *positivement invariant*) par le flot  $\phi_t$  si, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  (respectivement dans  $\mathbb{R}_+$ ),  $\phi_t(A)$  est inclus dans  $A$ .

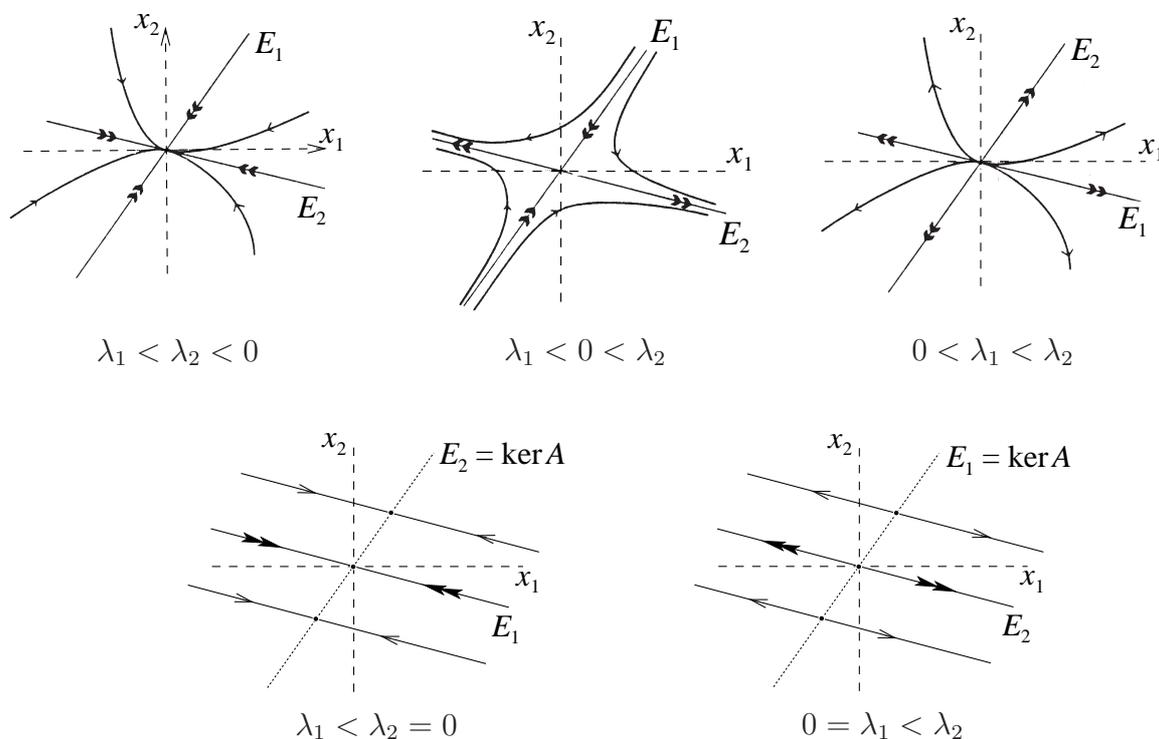


FIGURE 4.1 – Exemples de portraits de phase pour  $f(x) = Ax$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

D’autres exemples d’ensembles invariants sont fournis par les hypersurfaces de niveau d’une fonction réelle de l’espace d’état qui reste constante le long des trajectoires, i.e. une intégrale première.

**Définition 4.4.** On appelle *intégrale première* d’une EDO  $\dot{x} = f(x)$ , une fonction  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , qui reste constante le long des trajectoires de l’EDO. Cela est vrai en particulier si, pour tout  $x \in \Omega$  et  $t$ ,  $\frac{d}{dt}(h(\phi_t(x))) = 0$ , condition qui est équivalente à

$$D_x h(x) \cdot f(x) = 0, \quad \text{pour tout } x \in \Omega.$$

(Noter que cette dernière condition ne demande pas une connaissance explicite du flot.) Ainsi, les hypersurfaces de niveau  $H_c := \{x \in \Omega : h(x) = c\}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  sont invariantes par le flot.

## 4.2 Linéarisation et perturbation du flot

Dans la pratique, on n’a quasiment jamais une connaissance exacte des conditions initiales (ni de l’équation elle-même, en fait). Il est donc primordial de savoir ce qui se passe pour la solution d’une équation différentielle lorsque la condition initiale est perturbée (ou quand l’équation elle-même est perturbée) : comment varie l’intervalle

de définition et les valeurs de la solution, peut-on donner un ordre de grandeur de ces variations, ... ? Les réponses à ces questions sont contenues dans le théorème ci-dessous : donnons d'abord le théorème et sa preuve, nous expliquerons ensuite pourquoi il permet de répondre aux questions précédentes.

Rappelons que nous considérons une équation différentielle autonome

$$x'(t) = f(x(t)), \quad (1.12)$$

où le champ de vecteurs  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est supposé de classe  $C^1$ .

**Théorème 4.3.** *Soit  $\bar{x}(\cdot)$  une solution de l'équation (1.12) définie sur un intervalle  $[a, b]$  contenant 0. Il existe alors un voisinage  $\mathcal{V} \subset \Omega$  de  $v_0 = \bar{x}(0)$  tel que, pour tout  $v \in \mathcal{V}$ , l'équation (1.12) admet une unique solution  $x_v(\cdot)$  définie sur  $[a, b]$  et vérifiant  $x_v(0) = v$ .*

*De plus, l'application  $v \mapsto x_v(\cdot)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathcal{V}$  et sa différentielle en  $v_0$  est l'application qui à  $Dv$  associe la solution de*

$$\begin{cases} y'(t) = Df(\bar{x}(t)) \cdot y(t) \\ y(0) = Dv \end{cases}, \quad t \in [a, b].$$

*Remarque.* La solution  $x_v(\cdot)$  est simplement la restriction de la solution maximale  $\phi(\cdot, v)$  à l'intervalle  $[a, b]$ .

### 4.2.1 Conséquences et signification du théorème 4.3

**a. Domaine de définition du flot** La première conséquence est que, pour toute condition initiale  $v$  dans le voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\bar{x}(0)$ , la solution maximale  $\phi(\cdot, v)$  est définie sur tout l'intervalle  $[a, b]$ , i.e.  $[a, b] \subset I_v$ . Autrement dit, de façon informelle, si une solution est définie sur un temps ' long <sup>a</sup>, les solutions voisines sont également définies sur un temps ' long <sup>a</sup>. Ceci se traduit par une propriété du domaine de définition du flot.

**Corollaire 4.4.** *Le flot  $\phi$  est défini sur un ouvert  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R} \times \Omega$ .*

*En particulier, si  $(t, v_0) \in \mathcal{D}$ , alors l'application  $\phi_t$  est définie sur un voisinage de  $v_0$ .*

Cette propriété est très importante pour l'étude du flot et de sa dépendance par rapport aux conditions initiales : en effet,  $\phi$  et  $\phi_t$  étant définies sur des ouverts, il est maintenant possible d'étudier leur continuité et leur différentiabilité.

PREUVE.

▷ Rappelons que le domaine de définition du flot est

$$\mathcal{D} = \{(t, v) \in \mathbb{R} \times \Omega : t \in I_v\}.$$

Soit  $(t_0, v_0) \in \mathcal{D}$ . Puisque l'intervalle maximal  $I_{v_0}$  est ouvert (théorème 1.10), la solution maximale  $\phi(\cdot, v_0)$  est définie sur un intervalle  $[a, b] \subset I_{v_0}$  contenant  $t_0$ . Le théorème 4.3 implique alors que, pour tout  $v$  dans un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $v_0$ , on a encore  $[a, b] \subset I_v$ , c'est-à-dire que l'ensemble  $]a, b[ \times \mathcal{V}$ , qui est un voisinage de  $(t_0, v_0)$  dans  $\mathbb{R} \times \Omega$ , est inclus dans  $\mathcal{D}$ . □

**b. Dépendance continue** L'application  $v \mapsto x_v(\cdot)$  définie dans le théorème 4.3 est l'application qui à une condition initiale dans  $\mathcal{V}$  associe la solution correspondante de l'équation différentielle sur  $[a, b]$ . Cette application étant  $C^1$ , elle est en particulier continue, c'est-à-dire que

*les solutions de l'équation différentielle (1.12) dépendent de façon continue de leur condition initiale.*

C'est une propriété essentielle pour les applications (et d'un point de vue numérique) : en effet, elle signifie, grosso modo, que la solution calculée à partir d'une approximation de la condition initiale est une approximation de la vraie solution. Ceci justifie l'utilisation d'équations différentielles dans la modélisation de phénomènes réels, où on n'a qu'une connaissance approximative des données.

**c. Équation linéarisée** La dernière partie du théorème 4.3 affirme que les valeurs de la différentielle de l'application  $\psi : v \mapsto x_v(\cdot)$  sont les solutions d'une certaine équation linéaire. Cette équation linéaire joue un rôle important dans la suite.

**Définition 4.5.** Soit  $\bar{x}(\cdot) : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$  une solution de (1.12). L'équation linéaire dans  $\mathbb{R}^n$

$$y'(t) = Df(\bar{x}(t)) \cdot y(t), \quad t \in [a, b],$$

est appelée *équation linéarisée de (1.12) autour de  $\bar{x}(\cdot)$* .

Pour tout  $\delta v \in \mathbb{R}^n$ ,  $D\psi(\bar{x}(0)) \cdot \delta v$  est la solution de l'équation linéarisée autour de  $\bar{x}(\cdot)$  valant  $\delta v$  en  $t = 0$ . En notant  $R(t, s)$  la résolvante de l'équation linéarisée autour de  $\bar{x}(\cdot)$ , on obtient, pour tout  $t \in [a, b]$ ,

$$(D\psi(\bar{x}(0)) \cdot \delta v)(t) = R(t, 0)\delta v.$$

Intéressons-nous maintenant à l'application  $\phi_t$ . Fixons un point  $v_0$  de  $\Omega$  et un instant  $t \in I_{v_0}$ . D'après le théorème 4.3, l'application  $\phi_t$  est définie et de classe  $C^1$  sur un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $v_0$  dans  $\Omega$ . Avec les notations ci-dessus, on a clairement  $\phi_t(v) = x_v(t) = (\psi(v))(t)$  et donc

$$D\phi_t(v_0) \cdot \delta v = (D\psi(v_0) \cdot \delta v)(t).$$

On en déduit le résultat suivant.

**Corollaire 4.5.** Soient  $v_0 \in \Omega$  et  $t \in I_{v_0}$ . L'application  $\phi_t$  est de classe  $C^1$  sur un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $v_0$  et

$$D\phi_t(v_0) = R(t, 0),$$

où  $R$  est la résolvante de l'équation linéarisée

$$y'(s) = Df(\phi_s(v_0)) \cdot y(s), \quad s \in [0, t].$$

On peut donner une explication plus intuitive du rôle de l'équation linéarisée. On choisit une solution  $\bar{x}(\cdot) : [a, b] \rightarrow \Omega$  de l'équation différentielle, de condition initiale  $v_0 = \bar{x}(0)$ . Considérons maintenant une perturbation  $v_0 + \delta v$  de la condition initiale et écrivons la solution correspondante (*i.e.*  $x_{v_0+\delta v}(\cdot)$ ) sous la forme d'une perturbation  $\bar{x}(\cdot) + \delta x(\cdot)$  de la solution d'origine. Cette perturbation étant une solution, elle doit satisfaire l'équation différentielle :

$$\bar{x}'(t) + (\delta x)'(t) = f(\bar{x}(t) + \delta x(t)), \quad t \in [a, b].$$

En utilisant un développement limité de  $f$  en  $\bar{x}(t)$  (à  $t$  fixé) :

$$f(\bar{x}(t) + \delta x(t)) = f(\bar{x}(t)) + Df(\bar{x}(t)) \cdot \delta x(t) + \text{reste},$$

et en tenant compte du fait que  $\bar{x}'(t) = f(\bar{x}(t))$ , on obtient

$$(\delta x)'(t) = Df(\bar{x}(t)) \cdot \delta x(t) + \text{reste}.$$

En ne conservant que les termes du premier ordre<sup>a</sup> on retrouve l'équation linéarisée  $(\delta x)'(t) = Df(\bar{x}(t)) \cdot \delta x(t)$ . Autrement dit, la solution perturbée s'écrit  $\bar{x}(\cdot) + \delta x(\cdot) + \text{reste}$ , où le terme du premier ordre<sup>a</sup>  $\delta x(\cdot)$  est la solution de

$$\begin{cases} (\delta x)'(t) = Df(\bar{x}(t)) \cdot (\delta x)(t) \\ (\delta x)(0) = \delta v \end{cases}.$$

L'équation linéarisée indique donc comment se propage au cours du temps une perturbation de la condition initiale.

Bien entendu ce qui précède n'est pas un raisonnement rigoureux (les restes posent évidemment quelques problèmes!), seulement une heuristique.

*Remarque.* L'équation linéarisée est en général une équation linéaire non-autonome, on ne sait donc pas a priori calculer ses solutions. Cependant, si  $v_0$  est un point d'équilibre, la solution maximale  $\bar{x}(\cdot) = \phi(\cdot, v_0)$  est la fonction constante  $\bar{x}(\cdot) \equiv v_0$ , définie sur tout  $\mathbb{R}$ , et dans ce cas l'équation linéarisée est autonome :

$$y'(t) = Df(v_0) \cdot y(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Exemple d'application : champs de vecteurs à divergence nulle.* Rappelons d'abord que la divergence d'un champ de vecteurs  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ , est définie comme

$$\operatorname{div} f(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) = \operatorname{tr} Df(x).$$

Considérons alors un temps  $t$  et un domaine  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^n$ , supposé inclus dans le domaine de définition de  $\phi_t$ . Notons  $\Gamma_t = \phi_t(\Gamma)$  le transport de  $\Gamma$  de 0 à  $t$  par l'équation (1.12). En utilisant la formule de changement de variable dans les intégrales multiples, on obtient

$$\operatorname{vol}(\Gamma_t) = \int_{\phi_t(\Gamma)} d\mu = \int_{\Gamma} |\det D\phi_t(x)| d\mu,$$

où, d'après le corollaire 4.5,  $D\phi_t(x)$  est la résolvante de l'équation linéarisée.

Supposons maintenant que  $\operatorname{div} f(x) = \operatorname{tr} Df(x) \equiv 0$ . Le théorème de Liouville (corollaire 2.7) implique que le déterminant de la résolvante du linéarisé est égal à 1, et donc que  $\det D\phi_t(x) = 1$ . On a alors  $\operatorname{vol}(\Gamma_t) = \operatorname{vol}(\Gamma)$ , c'est-à-dire *si  $f$  est un champ de divergence nulle, le flot de  $f$  préserve le volume.*

## 4.2.2 Dépendance par rapport à un paramètre

Considérons maintenant une famille d'équations différentielles dépendant d'un paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}^p$  :

$$x'(t) = f_\lambda(x(t)), \tag{4.1}$$

où chaque  $f_\lambda$  est un champ de vecteurs sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Supposons également que  $f(x, \lambda) = f_\lambda(x)$  est une application de classe  $C^1$ . On s'intéresse à la dépendance des solutions de ces équations différentielles par rapport au paramètre  $\lambda$ .

Remarquons d'abord que l'équation (4.1) est équivalente à

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), \lambda) \\ \lambda'(t) = 0 \end{cases},$$

c'est-à-dire à l'équation différentielle dans  $\mathbb{R}^{n+p}$  associée au champ de vecteurs  $F(x, \lambda) = (f(x, \lambda), 0)$ . Ainsi, les solutions de (4.1) dépendent du paramètre  $\lambda$  de la même façon que les solutions de l'équation différentielle  $(x, \lambda)'(t) = F((x, \lambda)(t))$  dépendent de leur condition initiale. D'après ce que nous avons vu précédemment dans cette section, nous avons donc les propriétés suivantes.

- Les solutions  $\phi^\lambda(\cdot, v)$  de (4.1) dépendent de façon  $C^1$ , donc continue, du paramètre  $\lambda$  (et de la condition initiale  $v$ );
- La différentielle de l'application  $(v, \lambda) \mapsto \phi^\lambda(\cdot, v)$  en un point  $(v_0, \lambda_0)$  est l'application qui à  $(\delta v, \delta \lambda)$  associe la solution  $y(\cdot)$  de l'équation différentielle affine

$$\begin{cases} y'(t) = D_x f(\bar{x}(t), \lambda_0) \cdot y(t) + D_\lambda f(\bar{x}(t), \lambda_0) \cdot \delta \lambda \\ y(0) = \delta v \end{cases},$$

où  $\bar{x}(\cdot) = \phi^{\lambda_0}(\cdot, v_0)$ . Autrement dit, en utilisant la formule de variation de la constante,

$$y(t) = R(t, 0)\delta v + \int_0^t R(t, s)D_\lambda f(\bar{x}(s), \lambda_0) \cdot \delta \lambda ds,$$

où  $R(t, s)$  est la résolvante associée au système linéarisé  $y'(t) = D_x f(\bar{x}(t), \lambda_0) \cdot y(t)$ .

### 4.3 Équilibres et stabilité

Considérons l'équation différentielle autonome

$$x'(t) = f(x(t)), \tag{4.2}$$

où le champ de vecteurs  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est supposé de classe  $C^1$ .

**Définition 4.6.** On dit qu'un point  $x_0 \in \Omega$  est un *équilibre* de (4.2) si la fonction constante  $x(\cdot) \equiv x_0$  est solution de (4.2) ou, de façon équivalente, si  $f(x_0) = 0$  (vérifier que c'est bien équivalent!).

Autrement dit,  $\phi_t(x_0) = x_0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , où  $\phi$  est le flot du champ de vecteurs  $f$  (l'intervalle maximal associé à  $x_0$  étant  $I_{x_0} = \mathbb{R}$ ). L'orbite de  $x_0$  est donc réduite à un point :  $\mathcal{O}_{x_0} = \{x_0\}$ .

Quand l'équation (4.2) modélise l'évolution d'un phénomène physique (mécanique, biologique, écologique, ...), un équilibre correspond bien à la notion habituelle d'état d'équilibre<sup>a</sup> : si le système est dans l'état  $x_0$ , alors il y reste (et il y a toujours été). En pratique on sait cependant que seuls les états d'équilibre ayant certaines propriétés de stabilité sont significatifs.

**Définition 4.7.** Nous dirons qu'un équilibre  $x_0$  est *stable* si, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \text{et} \quad t > 0 \quad \implies \quad \|\phi_t(x) - x_0\| < \epsilon.$$

Ainsi, toute solution proche de  $x_0$  en reste proche.

*Remarque.* Toute solution dont la condition initiale est dans une boule  $B(x_0, \delta)$  reste dans la boule  $B(x_0, \epsilon)$ , et donc dans un compact de  $\Omega$ , pour  $t > 0$  (on suppose  $\epsilon$  suffisamment petit pour que  $\bar{B}(x_0, \epsilon) \subset \Omega$ ). D'après la proposition 1.11, ces solutions sont donc définies pour tout  $t > 0$ .

**Définition 4.8.** Nous dirons qu'un équilibre  $x_0$  est localement *asymptotiquement stable* (LAS) si il est stable et si il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  tel que, pour tout  $x \in V$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x_0.$$

Si  $V$  est égal à tout l'espace d'état, on dira que  $x_0$  est globalement *asymptotiquement stable* (GAS).

Dans le cas (LAS), toute solution proche de l'équilibre en reste proche et en plus converge vers lui.

### 4.3.1 Le cas linéaire

Considérons le cas particulier d'une équation différentielle autonome linéaire

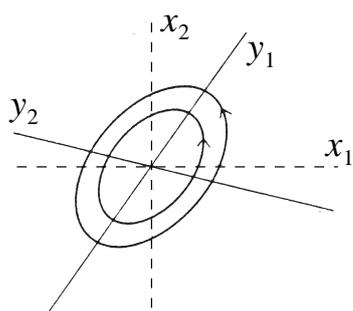
$$x'(t) = Ax(t), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

L'origine est toujours un équilibre de cette équation (mais il peut y en avoir d'autres : tout élément de  $\ker A$  est un équilibre). L'étude réalisée dans la section 3.4 permet de caractériser la stabilité de cet équilibre. Par ailleurs, due à la linéarité du système (son homogénéité suffit), il n'y a pas de distinction entre local ou global. En conséquence, dans les énoncés qui suivent, la stabilité, quand elle a lieu, est globale.

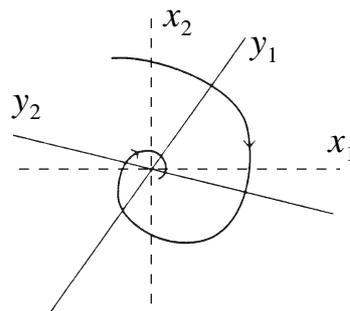
#### Proposition 4.6.

- L'origine est un équilibre asymptotiquement stable de  $x' = Ax$  si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  sont de partie réelle strictement négative, i.e.  $\mathbb{R}^n = E^s$ .
- Si  $A$  a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors l'origine n'est pas un équilibre stable de  $x' = Ax$ .

Notons que l'origine peut être un équilibre stable mais non asymptotiquement stable. C'est une situation que l'on rencontre quand  $A$  a des valeurs propres de partie réelle nulle, par exemple quand  $A$  est antisymétrique (voir proposition 2.8 et la discussion qui suit). On a représenté figure 4.2 des portraits de phase dans  $\mathbb{R}^2$  correspondant à une matrice antisymétrique (cas a) et une autre dont les valeurs propres ont une partie réelle  $< 0$  (cas b).



Cas a. Équilibre stable mais non asymptotiquement stable



Cas b. Équilibre asymptotiquement stable

FIGURE 4.2 – Exemples de portraits de phase stables pour  $f(x) = Ax$  avec  $A \in M_2(\mathbb{R})$ .

Remarquons enfin que l'on peut donner une condition nécessaire et suffisante de stabilité :

*l'origine est un équilibre stable de  $x' = Ax$  si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  sont de partie réelle négative ou nulle et si pour toute valeur propre de partie réelle nulle, les multiplicités algébrique et géométrique coïncident, (c'est-à-dire  $\mathbb{R}^n = E^s + E^c$  et  $A|_{E^c}$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ ).*

### 4.3.2 Le cas affine

Considérons maintenant un champ de vecteurs affine  $f(x) = Ax + b$  sur  $\mathbb{R}^n$ , où  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est une matrice et  $b \in \mathbb{R}^n$  un vecteur. Un équilibre de l'équation

$$x'(t) = Ax(t) + b$$

est un point  $x_0$  qui vérifie  $Ax_0 + b = 0$  (noter qu'un tel point n'existe que si  $b \in \text{Im } A$ ). En remplaçant  $b$  par  $-Ax_0$ , on réécrit l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{d}{dt}(x(t) - x_0) = A(x(t) - x_0).$$

Ainsi la stabilité et la stabilité asymptotique d'un équilibre de l'équation affine  $x'(t) = Ax(t) + b$  sont équivalentes respectivement à celles de l'origine pour l'équation linéaire  $y'(t) = Ay(t)$ .

## 4.4 La stabilité par la linéarisation

Soit  $x_0$  un équilibre de l'équation différentielle (4.2). Nous allons montrer dans les deux théorèmes suivants que l'étude des valeurs propres de la matrice  $Df(x_0)$  permet souvent de caractériser la stabilité de l'équilibre.

**Théorème 4.7.** *Si toutes les valeurs propres de  $Df(x_0)$  sont de partie réelle strictement négative, alors  $x_0$  est un équilibre asymptotiquement stable.*

*Remarque.* Contrairement au cas des équations linéaires, la condition du théorème est suffisante mais pas nécessaire. Prenons par exemple l'équation  $y'(t) = -y^3(t)$  dans  $\mathbb{R}$ . L'équilibre 0 ne satisfait pas la condition du théorème puisque  $Df(0) = 0$ . En revanche c'est un équilibre asymptotiquement stable puisque la solution valant  $y_0 \neq 0$  en  $t = 0$  est

$$y(t) = \frac{\text{signe}(y_0)}{\sqrt{2t + \frac{1}{y_0^2}}}, \quad t \geq 0,$$

qui est décroissante et converge vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ .

\*PREUVE.

▷ Pour simplifier, on se ramène par translation à  $x_0 = 0$ . D'après l'hypothèse, il existe  $\alpha > 0$  tel que  $-\alpha$  est strictement supérieur à la partie réelle de toute valeur propre de  $Df(0)$ . D'après un résultat classique d'algèbre linéaire, il existe alors un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$  sur  $\mathbb{R}^n$  tel que

$$\langle Df(0)x, x \rangle_\alpha \leq -\alpha \|x\|_\alpha^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

où  $\|\cdot\|_\alpha$  est la norme associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$  (le résultat est clair quand  $Df(0)$  est diagonalisable, sinon il se montre en utilisant la décomposition de Jordan).

Or, par définition de la différentielle,

$$\langle f(x), x \rangle_\alpha = \langle Df(0)x, x \rangle_\alpha + o(\|x\|_\alpha^2).$$

Ainsi, pour  $x$  suffisamment proche de 0, disons  $\|x\| < \delta$ , on obtient

$$\langle f(x), x \rangle_\alpha \leq -\frac{\alpha}{2} \|x\|_\alpha^2.$$

▷ Prenons maintenant un point  $v \neq 0$  vérifiant  $\|v\| < \delta$  et notons  $x(t) = \phi_t(v)$  la solution issue de  $v$ . On peut choisir un temps  $t_0 > 0$  suffisamment petit pour que  $\|x(t)\| < \delta$  pour tout  $t \in [0, t_0]$ . La fonction  $t \mapsto \|x(t)\|_\alpha$  est dérivable (car  $x(t) \neq 0 \forall t$ ), et

$$\frac{d}{dt} \|x(t)\|_\alpha = \frac{\langle x'(t), x(t) \rangle_\alpha}{\|x(t)\|_\alpha} = \frac{\langle f(x(t)), x(t) \rangle_\alpha}{\|x(t)\|_\alpha} \leq -\frac{\alpha}{2} \|x(t)\|_\alpha.$$

Ceci implique d'abord que  $\|x(t)\|_\alpha$  est décroissante :  $x(t)$  reste donc confinée dans le compact  $\|x\|_\alpha \leq \|v\|_\alpha$ , ce qui entraîne que  $x(\cdot)$  est définie pour tout  $t > 0$  (proposition 1.11). D'autre part, d'après le lemme de Gronwall,

$$\|x(t)\|_\alpha \leq e^{-\frac{\alpha}{2}t} \|v\|_\alpha.$$

Finalement, on a montré que, si  $\|v\| < \delta$ , alors  $\phi_t(v)$  reste dans  $B(0, \delta)$  et tend vers 0, ce qui montre que 0 est un équilibre asymptotiquement stable. □

**Théorème 4.8.** *Si  $x_0$  est un équilibre stable, alors toutes les valeurs propres de  $Df(x_0)$  sont de partie réelle négative ou nulle.*

On utilisera généralement la contraposée de ce théorème : si  $Df(x_0)$  a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors l'équilibre  $x_0$  n'est pas stable.

Il est important de noter que les réciproques des théorèmes 4.7 et 4.8 sont fausses, comme le montre l'exemple ci-dessous. La stabilité d'un équilibre n'est donc pas forcément déterminée par le linéarisé. Nous allons ensuite introduire une classe d'équilibres pour lesquels les réciproques des théorèmes 4.7 et 4.8 sont vérifiées.

*Exemple.* Considérons deux équations différentielles dans  $\mathbb{R}^2$ ,

$$x' = f(x) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x' = g(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix},$$

où  $x = (x_1, x_2)$ . Ces deux équations ont pour unique équilibre 0. Leurs linéarisés en 0 sont égaux,

$$Df(0) = Dg(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

et ont pour valeurs propres  $\pm i$ , dont la partie réelle est évidemment nulle ! Cependant l'équilibre 0 est asymptotiquement stable dans le premier cas alors qu'il n'est pas stable dans le deuxième.

En effet, posons  $\rho(x) = x_1^2 + x_2^2$ . Si  $x(\cdot)$  est une solution de l'équation  $x' = f(x)$ , alors

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t)) = 2(x_1x_1' + x_2x_2') = -2\rho^2(x(t)).$$

Ainsi  $\rho(x(t)) = \|x(t)\|^2$  est décroissant et tend vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ , ce qui implique que 0 est asymptotiquement stable pour l'équation  $x' = f(x)$ .

De même, si  $x(\cdot)$  est une solution de l'équation  $x' = g(x)$ , on obtient

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t)) = 2\rho^2(x(t)).$$

Dans ce cas,  $\rho(x(t)) = \|x(t)\|^2$  tend vers l'infini en temps fini (phénomène d'explosion), ce qui implique que l'équilibre 0 n'est pas stable pour l'équation  $x' = g(x)$ .

#### 4.4.1 Équilibres hyperboliques

**Définition 4.9.** Un équilibre  $x_0$  est dit *hyperbolique* si toutes les valeurs propres de  $Df(x_0)$  ont une partie réelle non nulle.

Les équilibres hyperboliques jouent un rôle important en pratique puisque, comme nous l'avons vu à la fin de la section 3.4, la classe des matrices hyperboliques est ouverte et dense dans  $M_n(\mathbb{R})$ .

D'après les deux théorèmes précédents, la stabilité d'un équilibre hyperbolique  $x_0$  est totalement caractérisée par le signe des parties réelles des valeurs propres de  $Df(x_0)$ .

**Corollaire 4.9.** *Un équilibre hyperbolique est soit asymptotiquement stable (si les valeurs propres de  $Df(x_0)$  ont toutes une partie réelle négative), soit non stable.*

Ainsi, un équilibre hyperbolique  $x_0$  est stable (resp. asymptotiquement stable) si et seulement si 0 est un équilibre stable (resp. asymptotiquement stable) pour l'équation linéarisée en  $x_0$ ,

$$y'(t) = Df(x_0) \cdot y(t). \quad (4.3)$$

On a en fait beaucoup plus : les portraits de phase du système et de son linéarisé ont la même allure car ils sont topologiquement équivalents.

**Théorème 4.10** (Théorème d’Hartman-Grobmann). *Soit  $x_0$  un équilibre hyperbolique. Notons  $\phi_t^L : y \mapsto e^{tDf(x_0)}y$  le flot du linéarisé en  $x_0$ . Alors il existe un homéomorphisme  $h : V_{x_0} \rightarrow V_0$ , où  $V_{x_0}$  et  $V_0$  sont des voisinages respectivement de  $x_0$  et 0 dans  $\mathbb{R}^n$ , tel que*

$$\phi_t^L(h(x)) = h(\phi_t(x)),$$

*partout où ces expressions ont un sens.*

## 4.5 Fonctions de Lyapunov

Il existe une autre approche que la linéarisation pour obtenir des résultats de stabilité **qui ne nécessite pas une connaissance explicite du flot**. Commençons par donner un exemple qui illustre l’idée générale.

### 4.5.1 Champs de gradient

Un *champ de gradient* est un champ de vecteurs de la forme

$$f(x) = -\nabla V(x),$$

où  $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^2$  (de façon à ce que  $f$  soit de classe  $C^1$ ). Rappelons que  $\nabla V(x)$  désigne le *gradient de  $V$  en  $x$* , c’est-à-dire l’unique vecteur de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant

$$DV(x) \cdot v = \langle \nabla V(x), v \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Dans l’espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , en coordonnées,  $\nabla V(x) = (\frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}(x))$ .

Un équilibre  $x_0$  de ce champ de vecteur est un point critique de  $V$ , *i.e.*  $\nabla V(x_0) = 0$ . Un équilibre peut donc être un minimum local, un maximum local, ou un point selle, mais nous allons voir que seuls les minima locaux peuvent être des équilibres stables.

La dynamique associée à un champ de gradient possède en effet une propriété qui la rend assez simple. Si  $x(\cdot)$  est une solution de l’équation différentielle  $x'(t) = -\nabla V(x(t))$ , alors

$$\frac{d}{dt} [V(x(t))] = DV(x(t)) \cdot x'(t) = -\|\nabla V(x(t))\|^2, \quad (4.4)$$

pour tout  $t$  dans l’intervalle de définition de  $x(\cdot)$ . Ainsi  $V(x(t))$  est soit constante, et dans ce cas  $x(t) \equiv x_0$  est un point critique, soit strictement décroissante. Intuitivement, ceci signifie que toute solution tend à se rapprocher d’un minimum, et donc (nous le montrerons plus loin) que :

- si un équilibre  $x_0$  n’est pas un minimum local (*i.e.*  $x_0$  est un maximum local ou un point selle), alors  $x_0$  n’est pas un équilibre stable ;
- si  $x_0$  est un minimum local strict, alors  $x_0$  est un équilibre stable.

### 4.5.2 Fonctions de Lyapunov

Considérons maintenant une équation différentielle autonome quelconque

$$x'(t) = f(x(t)), \quad (4.2)$$

associée à un champ de vecteurs  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ . L'exemple des champs de gradient suggère d'introduire la définition suivante.

**Définition 4.10.** Soient  $x_0$  un équilibre de (4.2),  $U \subset \Omega$  un voisinage de  $x_0$  et  $L : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On dit que  $L$  est une *fonction de Lyapunov locale pour (4.2) en  $x_0$*  si :

- (a)  $L(x_0) = 0$  et  $L(x) > 0$  pour  $x \neq x_0$  (i.e.  $x_0$  est un minimum strict de  $L$  sur  $U$ );
- (b) la fonction  $t \mapsto L(\phi_t(x))$  est décroissante.

Si de plus  $L$  satisfait

- (c) pour  $x \neq x_0$ , la fonction  $t \mapsto L(\phi_t(x))$  est strictement décroissante,

on dit que  $L$  est une fonction de Lyapunov locale *stricte* pour (4.2) en  $x_0$ .

Enfin, si  $U$  est égal à tout l'espace d'état, on peut remplacer dans ce qui précède "locale" par "globale".

Quand  $L$  est de classe  $C^1$ , on peut remplacer les conditions (b) et (c) respectivement par les conditions suivantes, qui sont plus fortes mais plus simples à vérifier que (b) et (c) :

- (b)'  $\langle \nabla L(x), f(x) \rangle \leq 0$  pour tout  $x \in U$ ;
- (c)'  $\langle \nabla L(x), f(x) \rangle < 0$  pour tout  $x \in U$ ,  $x \neq x_0$ .

Une fonction de Lyapunov est donc une sorte de fonction d'énergie qui décrit le long des trajectoires.

**Théorème 4.11.** *Supposons que l'équation différentielle (4.2) admette  $L$  comme fonction de Lyapunov locale en un équilibre  $x_0$ . Alors  $x_0$  est un équilibre stable.*

- (Loc) *Si de plus  $L$  est stricte, alors  $x_0$  est localement asymptotiquement stable.*
- (Glob) *Si de plus  $L$  est globale, stricte et  $L$  tend vers l'infini lorsque  $x$  tend vers l'infini, alors  $x_0$  est globalement asymptotiquement stable.*

\*PREUVE.

▷ Soit  $L : U \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction de Lyapunov. Quitte à remplacer  $U$  par une boule fermée centrée en  $x_0$ , on le suppose compact. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble  $U_\alpha = \{x \in U : L(x) < \alpha\}$  est inclus dans la boule ouverte  $B(x_0, \varepsilon)$  pour  $\alpha > 0$  suffisamment petit (en effet, sinon il existe une suite de points  $x_n$  en dehors de  $B(x_0, \varepsilon)$  vérifiant  $\lim L(x_n) = 0$ ;  $U$  étant compact,  $x_n$  a alors un point d'accumulation  $\bar{x} \neq x_0$ , qui doit vérifier  $L(\bar{x}) = 0$ , ce qui est impossible d'après la propriété (a)). Or, d'après la propriété (b) de  $L$ , pour tout  $x \in U_\alpha$ , la solution  $\phi_t(x)$  est confinée dans  $U_\alpha$ ; ceci montre la stabilité de l'équilibre  $x_0$ .

▷ Supposons maintenant que  $L$  est une fonction de Lyapunov locale et stricte. Considérons un point  $x \in U_\alpha$  différent de  $x_0$ . La fonction  $t \mapsto L(\phi_t(x))$  étant strictement décroissante et minorée par 0, elle a une limite  $\ell$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . D'autre part,  $U$  étant compact, il existe une suite  $t_n, t_n \rightarrow +\infty$ , telle que  $\phi_{t_n}(x)$  est convergente. Notons  $\bar{x}$  la limite de cette dernière suite. Par continuité de  $L$ ,  $\bar{x}$  vérifie :

$$L(\bar{x}) = \lim_{t_n \rightarrow \infty} L(\phi_{t_n}(x)) = \lim_{t \rightarrow \infty} L(\phi_t(x)) = \ell.$$

De plus, pour tout  $s > 0$ , on a :

$$L(\phi_s(\bar{x})) = \lim_{t_n \rightarrow \infty} L(\phi_{s+t_n}(x)) = \ell,$$

ce qui montre que  $s \mapsto L(\phi_s(\bar{x})) \equiv L(\bar{x})$  n'est pas décroissante, et donc, d'après la propriété (c) de  $L$ , que  $\bar{x} = x_0$ .

Ainsi, le seul point d'accumulation de  $\phi_t(x)$  est  $x_0$ , ce qui montre que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x_0$ . L'équilibre  $x_0$  est donc asymptotiquement stable.

On adapte sans peine cette preuve au cas (Glob) en remarquant que les ensembles  $L_c := \{x \in \Omega \mid L(x) \leq c\}$ ,  $c > 0$ , sont compacts.

□

*Remarque.* Pour un équilibre asymptotiquement stable  $x_0$ , on appelle *bassin d'attraction* l'ensemble des points  $x \in \Omega$  tels que  $\phi_t(x) \rightarrow x_0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . Par définition de la stabilité asymptotique, le bassin d'attraction contient un voisinage de  $x_0$ . Une question importante en pratique est de déterminer la taille de ce bassin, voire le bassin lui-même.

Le domaine de définition d'une fonction de Lyapunov stricte, si il en existe une, donne des éléments de réponse à cette question. Supposons par exemple que  $\Omega = \mathbb{R}^n$  et que  $L$  soit une fonction de Lyapunov vérifiant les hypothèses du cas (Glob). Alors, le bassin d'attraction de  $x_0$  est  $\mathbb{R}^n$  tout entier.

Plus généralement, si  $L : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Lyapunov stricte en  $x_0$  et  $P \subset U$  un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^n$  positivement invariant par le flot (*i.e.*  $\phi_t(P) \subset P$  pour tout  $t \geq 0$ ), alors  $P$  est inclus dans le bassin d'attraction de  $x_0$ . Par exemple, les ensembles  $\{x \in U \mid L(x) \leq \alpha\}$  pour  $\alpha$  suffisamment petit sont fermés et positivement invariants (cf. Définition 4.3), donc inclus dans le bassin d'attraction.

Dans de nombreuses applications, il n'est pas possible d'avoir une fonction de Lyapunov stricte c'est-à-dire vérifiant la condition (c)'. On a alors le résultat suivant, appelé *principe d'invariance de Lasalle*.

**Théorème 4.12.** *Supposons que l'équation différentielle (4.2) admette  $L : U \rightarrow \mathbb{R}_+$  comme fonction de Lyapunov locale en un équilibre  $x_0$ . Notons  $D_U$ , le sous-ensemble de  $U$  défini par*

$$D_U := \{x \in U, \quad DL(x).f(x) = 0\}.$$

Alors,

- (Loc) toutes les trajectoires restant dans  $U$  convergent asymptotiquement vers le plus grand ensemble invariant (cf. Définition 4.3) contenu dans  $D_U$ .
- (Glob) Si de plus  $L$  est globale (i.e.  $U = \Omega$ ) et tend vers l'infini lorsque  $x$  tend vers l'infini, toutes les trajectoires sont définies sur  $\mathbb{R}_+$  et convergent asymptotiquement vers le plus grand ensemble invariant contenu dans  $D_U$ .

Le principe d'invariance consiste simplement à écrire le système surdéterminé suivant,

$$x' = f(x), \quad D_x L(x) = 0, \quad x \in U,$$

système caractérisant le plus grand ensemble invariant contenu dans l'intersection de  $U$  et  $D_U$ .

### 4.5.3 Exemples d'application

**a. Champs de gradient** Reprenons le cas d'un champ de gradients  $f(x) = -\nabla V(x)$ . Supposons que  $x_0$  soit un minimum local strict de  $V$ , c'est-à-dire l'unique minimum de  $V$  sur un voisinage  $U$  de  $x_0$ . La fonction  $V$  restreinte à  $U$  est bien une fonction de Lyapunov en  $x_0$ , la propriété (b)' étant toujours satisfaite d'après la formule (4.4). Donc  $x_0$  est bien un équilibre stable.

**b. Champ de force conservatif** Considérons un objet de masse  $m$  soumis à une force dérivant d'un potentiel  $V(x)$ . L'évolution de l'état  $x \in \mathbb{R}^n$  de l'objet au cours du temps est régi par le principe fondamental de la dynamique :

$$mx''(t) = -\nabla V(x(t)),$$

que l'on réécrit

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -\frac{1}{m}\nabla V(x(t)) \end{pmatrix}.$$

Autrement dit,  $(x, x')$  est solution de l'équation différentielle du 1er ordre dans  $\mathbb{R}^{2n}$

$$(x, v)'(t) = f((x, v)(t)), \quad \text{où } f(x, v) = (v, -\frac{1}{m}\nabla V(x)).$$

Un équilibre de cette équation différentielle est un point  $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^{2n}$  où  $x_0$  est un point critique du potentiel  $V(x)$ .

Supposons que  $x_0$  soit un minimum local strict de  $V$  et cherchons une fonction de Lyapunov. Essayons à partir de l'énergie totale du système :

$$E(x, v) = \frac{1}{2}m\|v\|^2 + V(x).$$

En posant  $L(x, v) = E(x, v) - V(x_0)$ , on obtient une fonction qui satisfait la propriété (a) d'une fonction de Lyapunov. De plus, comme  $\nabla L(x, v) = (\nabla V(x), mv)$ , on obtient

$$\langle \nabla L(x, v), f(x, v) \rangle \equiv 0,$$

(c'est la conservation de l'énergie!), c'est-à-dire la propriété (b)'. La fonction  $L$  est donc bien une fonction de Lyapunov en  $(x_0, 0)$ , ce qui montre le résultat bien connu (théorème de Lagrange) :

*si l'énergie potentielle  $V(x)$  a un minimum local strict en  $x_0$ , l'équilibre  $(x_0, 0)$  est stable.*

*Remarques.*

- L'équilibre  $(x_0, 0)$  ne peut pas être asymptotiquement stable : la fonction de Lyapunov  $L(x, v)$  étant constante le long d'une solution  $(x, v)(\cdot) \not\equiv (x_0, 0)$ , elle ne peut tendre vers 0, ce qui implique que  $(x, v)(t)$  ne peut pas tendre vers  $(x_0, 0)$ .
- L'approche par linéarisation n'aurait pas permis de conclure ici car  $(x_0, 0)$  n'est pas un équilibre hyperbolique (exercice : le montrer).

**c. Champ de vecteur linéaire** Considérons une équation différentielle linéaire

$$x'(t) = Ax(t), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

et supposons que toutes les valeurs propres de  $A$  sont de partie réelle strictement négative. On a vu (proposition 4.6) que dans ce cas l'origine est un équilibre (globalement) asymptotiquement stable. Cherchons une fonction de Lyapunov pour cette équation en 0. Le théorème suivant va nous en fournir.

**Théorème 4.13.** *Les propositions suivantes sont équivalentes.*

- (i)  *$A$  est Hurwitz (i.e. toutes ses valeurs propres sont de partie réelle strictement négative);*
- (ii) *il existe une matrice  $P \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $P = P^T > 0$  (c'est-à-dire que  $P$  est symétrique réelle et définie positive) et*

$$A^T P + PA < 0;$$

- (iii) *Pour toute matrice  $Q = Q^T > 0$ , il existe une unique matrice  $P = P^T > 0$  solution de l'équation de Lyapunov*

$$A^T P + PA = -Q.$$

PREUVE.

▷ Il suffit de montrer les implications (ii)  $\Rightarrow$  (i) et (i)  $\Rightarrow$  (iii).

Commençons par (ii)  $\Rightarrow$  (i). Soit  $P = P^T > 0$  telle que  $A^T P + PA = -Q$ . Notons  $\beta = \frac{\lambda_m(Q)}{\lambda_M(P)} > 0$  avec  $\lambda_m(Q)$  et  $\lambda_M(P)$  respectivement la plus petite des valeurs propres de  $Q$  et la plus grande des valeurs propres de  $P$ . Considérons la fonction de Lyapunov  $L(x) := x^T P x$ . Alors,

$$\dot{L}(x) = 2x^T A P x = x^T (A^T P + PA)x = -x^T Q x \leq -\lambda_m(Q) x^T x \leq -\beta L(x).$$

On en conclut que  $L(x(t)) \leq e^{-\beta t} L(x(0))$  (pourquoi?) et donc (i).

Montrons maintenant (i)  $\Rightarrow$  (iii). Supposons que  $A$  est Hurwitz. Pour  $t \geq 0$ , on pose

$$P(t) := \int_0^t e^{sA^T} Q e^{sA} ds.$$

Remarquons que  $P(t) > 0$  pour  $t > 0$  et  $t \mapsto P(t)$  est une fonction strictement croissante. Comme  $A$  est Hurwitz, l'intégrale généralisée

$$P = \int_0^\infty e^{sA^T} Q e^{sA} ds,$$

est convergente et on en conclue que  $P(\cdot)$  admet  $P$  comme limite lorsque  $t$  tend vers l'infini. De plus,  $P(\cdot)$  vérifie l'EDO suivante

$$\dot{P}(t) = A^T P(t) + P(t)A + Q.$$

La limite  $P$  est nécessairement point d'équilibre de cette EDO (pourquoi?) et donc satisfait l'équation de Lyapunov. Pour l'unicité, on procède comme suit. Soit  $M > 0$  une solution de l'équation de Lyapunov. On multiplie alors l'équation de Lyapunov vérifiée par  $M$  à gauche par  $e^{sA^T}$  et à droite par  $e^{sA}$ . On remarque que

$$e^{sA^T} A^T M e^{sA} + e^{sA^T} M A e^{sA} = \frac{d}{ds} (e^{sA^T} M e^{sA}).$$

On intègre entre 0 et l'infini et on obtient  $M = P$ . □

**e. Nouvelle preuve du théorème 4.7** Considérons un équilibre  $x_0$  de l'équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t)),$$

et supposons que toutes les valeurs propres de  $Df(x_0)$  sont de partie réelle strictement négative. Nous allons montrer que l'équation admet une fonction de Lyapunov stricte en  $x_0$ , ce qui donnera une nouvelle preuve du théorème 4.7.

Quitte à faire une translation, on suppose  $x_0 = 0$  et on choisit  $P = P^T > 0$  solution de l'équation de Lyapunov

$$Df(0)^T P + P Df(0) = -I_n.$$

On considère  $L(x) := x^T P x$  qui est une fonction de Lyapunov pour l'équation linéaire  $y'(t) = Df(0) \cdot y(t)$  (à vérifier). Remarquons d'autre part que

$$f(x) = Df(0) \cdot x + o(\|x\|).$$

En utilisant le paragraphe précédent, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \nabla L(x), f(x) \rangle &= \langle \nabla L(x), Df(0) \cdot x \rangle + \langle \nabla L(x), o(\|x\|) \rangle \\ &= -\|x\|^2 + 2 \int_0^\infty \langle e^{sDf(0)} x, e^{sDf(0)} o(\|x\|) \rangle ds. \end{aligned}$$

Le terme dans la dernière intégrale est un  $o(\|x\|^2)$ , donc pour  $\|x\|$  suffisamment petit,  $x \neq 0$ , on obtient

$$\langle \nabla L(x), f(x) \rangle \leq -\frac{1}{2}\|x\|^2 < 0,$$

c'est-à-dire la propriété (c)'. La fonction  $L$  est donc une fonction de Lyapunov stricte en  $x_0 = 0$ , ce qui montre que cet équilibre est asymptotiquement stable.