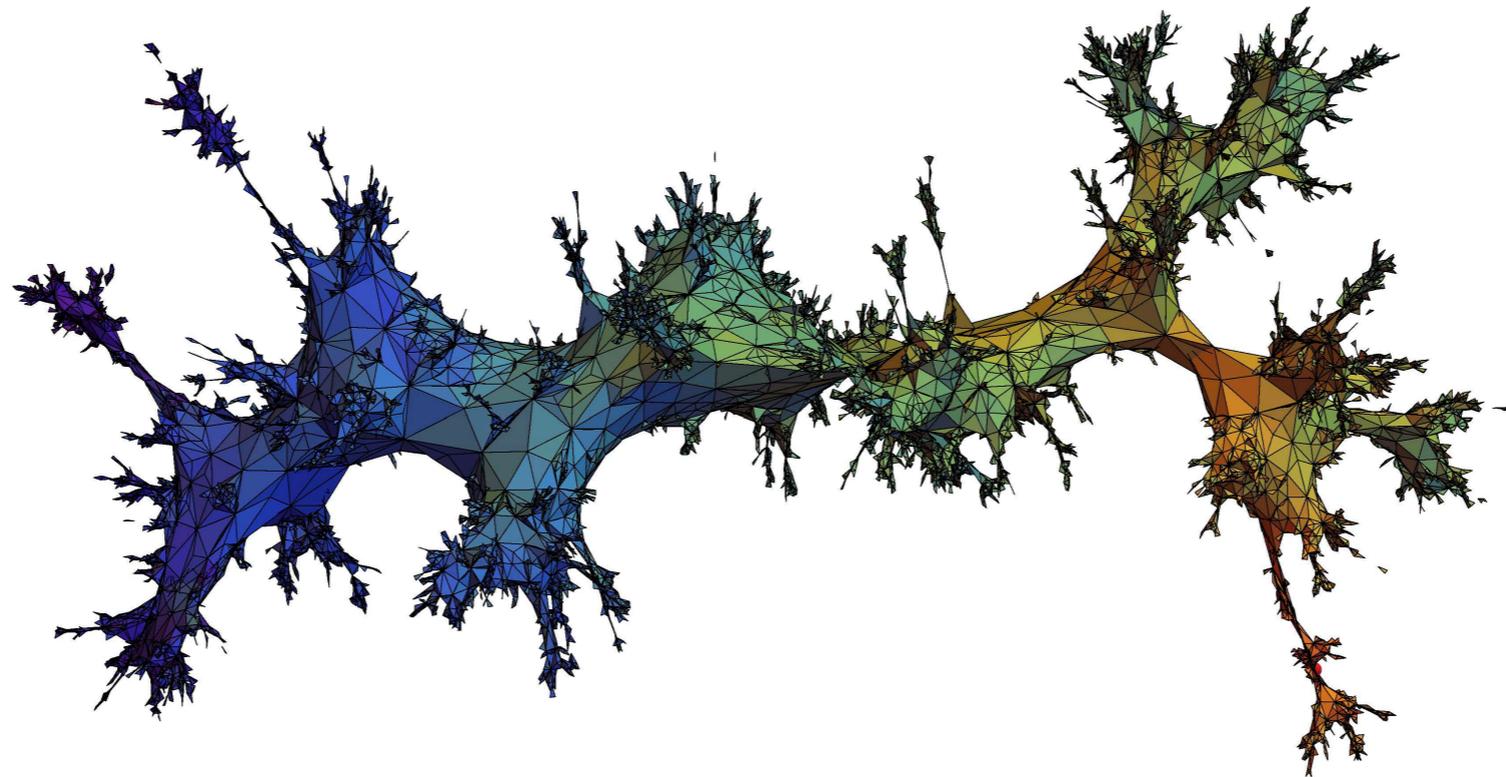


# *Théorèmes limites* *et applications*



Igor Kortchemski

igor.kortchemski@polytechnique.edu

---

M2 – Mathématiques de l'aléatoire



# I. QUELQUES MOTIVATIONS

## **I. QUELQUES MOTIVATIONS**

## **II. PLAN DU COURS ET DÉROULEMENT**

*Quelques motivations*

# *De quoi s'agit-il?*

Ce cours s'intéresse aux convergences

$$X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$$

pour des objets aléatoires.

# *De quoi s'agit-il?*

Ce cours s'intéresse aux convergences

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X$$

pour des objets aléatoires.

↪ *Dans quel espace vivent les objets ?*

# *De quoi s'agit-il?*

Ce cours s'intéresse aux convergences

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X$$

pour des objets aléatoires.

↪ *Dans quel espace vivent les objets?* Ici, un espace métrique  $(E, d)$ .

# *De quoi s'agit-il ?*

Ce cours s'intéresse aux convergences

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X$$

pour des objets aléatoires.

- ↪ *Dans quel espace vivent les objets ?* Ici, un espace métrique  $(E, d)$ .
- ↪ *Quel est le sens de la convergence lorsque les objets sont aléatoires ?*

# De quoi s'agit-il ?

Ce cours s'intéresse aux convergences

$$X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$$

pour des objets aléatoires.

↪ *Dans quel espace vivent les objets ?* Ici, un espace métrique  $(E, d)$ .

↪ *Quel est le sens de la convergence lorsque les objets sont aléatoires ?* Ici, convergence en loi :

$$\mathbb{E}[F(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[F(X)]$$

pour toute fonction continue bornée  $F : Z \rightarrow \mathbb{R}$ .

# De quoi s'agit-il?

Ce cours s'intéresse aux convergences

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X$$

pour des objets aléatoires.

↪ *Dans quel espace vivent les objets ?* Ici, un espace métrique  $(E, d)$ .

↪ *Quel est le sens de la convergence lorsque les objets sont aléatoires ?* Ici, convergence en loi :

$$\mathbb{E}[F(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[F(X)]$$

pour toute fonction continue bornée  $F : Z \rightarrow \mathbb{R}$ .

  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} X$  implique  $G(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} G(X)$

pour toute fonction continue  $G : Z \rightarrow \mathbb{R}$ .

# Intérêt ?

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite d'objets « discrets » convergeant en loi vers un objet « continu »  $X$  :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X.$$

# Intérêt ?

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite d'objets « discrets » convergeant en loi vers un objet « continu »  $X$  :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X.$$

Plusieurs intérêts :

↪ *Du discret au continu* : si une certaine propriété  $\mathcal{P}$  est vérifiée par tous les  $X_n$  et passe à la limite,  $X$  vérifie  $\mathcal{P}$ .

# Intérêt ?

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite d'objets « discrets » convergeant en loi vers un objet « continu »  $X$  :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X.$$

Plusieurs intérêts :

- ↪ *Du discret au continu* : si une certaine propriété  $\mathcal{P}$  est vérifiée par tous les  $X_n$  et passe à la limite,  $X$  vérifie  $\mathcal{P}$ .
- ↪ *Du continu au discret* : si une certaine propriété  $\mathcal{P}$  est vérifiée par  $X$  et passe à la limite,  $X_n$  vérifie « à peu près »  $\mathcal{P}$  pour  $n$  grand.

# Intérêt ?

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite d'objets « discrets » convergeant en loi vers un objet « continu »  $X$  :

$$X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X.$$

Plusieurs intérêts :

- $\curvearrowright$  *Du discret au continu* : si une certaine propriété  $\mathcal{P}$  est vérifiée par tous les  $X_n$  et passe à la limite,  $X$  vérifie  $\mathcal{P}$ .
- $\curvearrowright$  *Du continu au discret* : si une certaine propriété  $\mathcal{P}$  est vérifiée par  $X$  et passe à la limite,  $X_n$  vérifie « à peu près »  $\mathcal{P}$  pour  $n$  grand.
- $\curvearrowright$  *Universalité* : si  $(Y_n)_{n \geq 1}$  est une autre suite d'objets qui converge vers  $X$ , alors  $X_n$  et  $Y_n$  ont à peu près les mêmes propriétés pour  $n$  grand.

*Examples*

# *Espace fonctionnel*

Soit  $(X_i)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ .

# *Espace fonctionnel*

Soit  $(X_i)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ . On pose  $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ .

# Espace fonctionnel

Soit  $(X_i)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ . On pose  $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ . On sait que

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \text{Gaussienne.}$$

# Espace fonctionnel

Soit  $(X_i)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ . On pose  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . On sait que

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \text{Gaussienne.}$$

Mais que dire de la trajectoire  $\left( \frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}}, 0 \leq t \leq 1 \right)$ , où  $S_t$  est défini par interpolation linéaire ?

# Espace fonctionnel

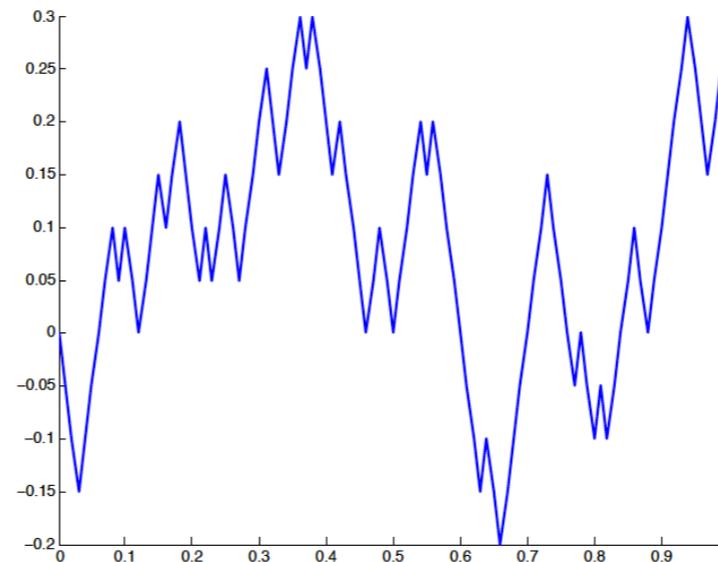
Soit  $(X_i)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ . On pose  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . On sait que

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \text{Gaussienne.}$$

Mais que dire de la trajectoire  $\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}}, 0 \leq t \leq 1\right)$ , où  $S_t$  est défini par interpolation linéaire ?

$$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}}, 0 \leq t \leq 1\right)$$

pour  $n = 100$  :



# Espace fonctionnel

Soit  $(X_i)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ . On pose  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . On sait que

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \text{Gaussienne.}$$

Mais que dire de la trajectoire  $\left( \frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}}, 0 \leq t \leq 1 \right)$ , où  $S_t$  est défini par interpolation linéaire ?

$\left( \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}, 0 \leq t \leq 1 \right)$   
pour  
 $n = 100000 :$



# Espace fonctionnel

Soit  $(X_i)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ . On pose  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Alors (théorème de Donsker)

$$\left( \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}, 0 \leq t \leq 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}}$$

# Espace fonctionnel

Soit  $(X_i)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ . On pose  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Alors (théorème de Donsker)

$$\left( \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}, 0 \leq t \leq 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} (W_t, 0 \leq t \leq 1),$$

# Espace fonctionnel

Soit  $(X_i)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ . On pose  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Alors (théorème de Donsker)

$$\left( \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}, 0 \leq t \leq 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} (W_t, 0 \leq t \leq 1),$$

dans l'espace des fonctions continues  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  muni de la topologie de la convergence uniforme,

# Espace fonctionnel

Soit  $(X_i)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ . On pose  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Alors (théorème de Donsker)

$$\left( \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}, 0 \leq t \leq 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} (W_t, 0 \leq t \leq 1),$$

dans l'espace des fonctions continues  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  muni de la topologie de la convergence uniforme, où  $(W_t, 0 \leq t \leq 1)$  est une fonction continue aléatoire appelée mouvement brownien.

# Espace fonctionnel

Soit  $(X_i)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ . On pose  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Alors (théorème de Donsker)

$$\left( \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}, 0 \leq t \leq 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} (W_t, 0 \leq t \leq 1),$$

dans l'espace des fonctions continues  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  muni de la topologie de la convergence uniforme, où  $(W_t, 0 \leq t \leq 1)$  est une fonction continue aléatoire appelée mouvement brownien.

↗ **Conséquence** : en prenant pour fonctionnelle "sup<sub>[0,1]</sub>" pour tout  $a > 0$ ,

$$\mathbb{P} \left( \frac{\max_{0 \leq i \leq n} S_i}{\sqrt{n}} > a \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq t \leq 1} W_t > a \right)$$

# Espace fonctionnel

Soit  $(X_i)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ . On pose  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Alors (théorème de Donsker)

$$\left( \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}, 0 \leq t \leq 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} (W_t, 0 \leq t \leq 1),$$

dans l'espace des fonctions continues  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  muni de la topologie de la convergence uniforme, où  $(W_t, 0 \leq t \leq 1)$  est une fonction continue aléatoire appelée mouvement brownien.

↗ **Conséquence** : en prenant pour fonctionnelle "sup<sub>[0,1]</sub>" pour tout  $a > 0$ ,

$$\mathbb{P} \left( \frac{\max_{0 \leq i \leq n} S_i}{\sqrt{n}} > a \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq t \leq 1} W_t > a \right) = 2 \int_a^\infty dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

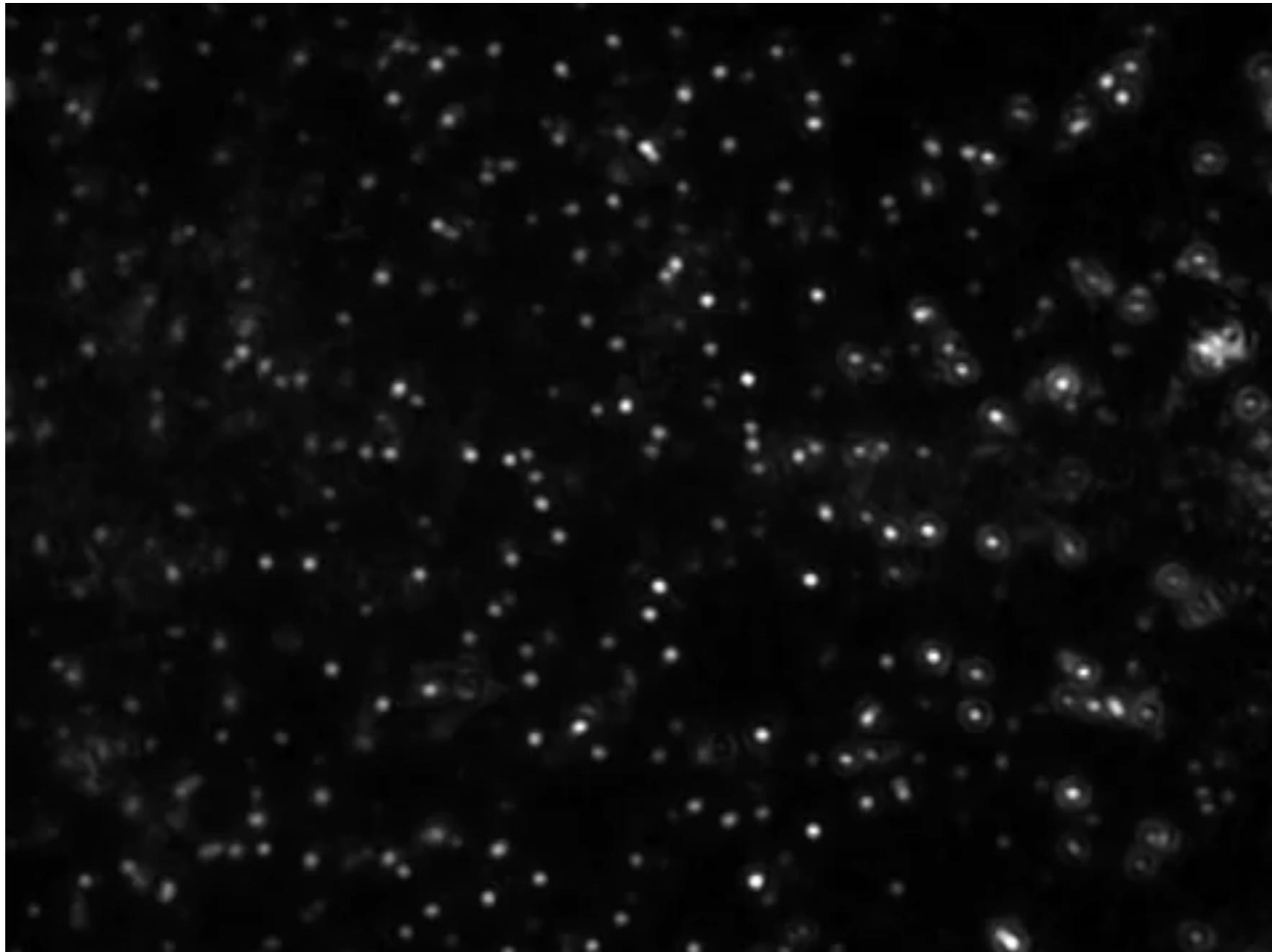
# *Le mouvement brownien*

# *Le mouvement brownien*

- 1827 : **Brown** observe le déplacement désordonné du pollen dans de l'eau ;

# *Le mouvement brownien*

- 1827 : **Brown** observe le déplacement désordonné du pollen dans de l'eau ;



# *Le mouvement brownien*

- 1827 : **Brown** observe le déplacement désordonné du pollen dans de l'eau ;
- 1905 : **Einstein** propose une explication de cette observation en utilisant les notions d'atomes et molécules ;

# *Le mouvement brownien*

- 1827 : **Brown** observe le déplacement désordonné du pollen dans de l'eau ;
- 1905 : **Einstein** propose une explication de cette observation en utilisant les notions d'atomes et molécules ;
- 1908 : **Perrin** confirme expérimentalement l'existence d'atomes et molécules (prix Nobel 1926) ;

# *Le mouvement brownien*

- 1827 : **Brown** observe le déplacement désordonné du pollen dans de l'eau ;
- 1905 : **Einstein** propose une explication de cette observation en utilisant les notions d'atomes et molécules ;
- 1908 : **Perrin** confirme expérimentalement l'existence d'atomes et molécules (prix Nobel 1926) ;

« C'est un cas où il est vraiment naturel de penser à ces fonctions continues sans dérivées que les mathématiciens ont imaginées, et que l'on regardait à tort comme de simples curiosités mathématiques, puisque l'expérience peut les suggérer. »

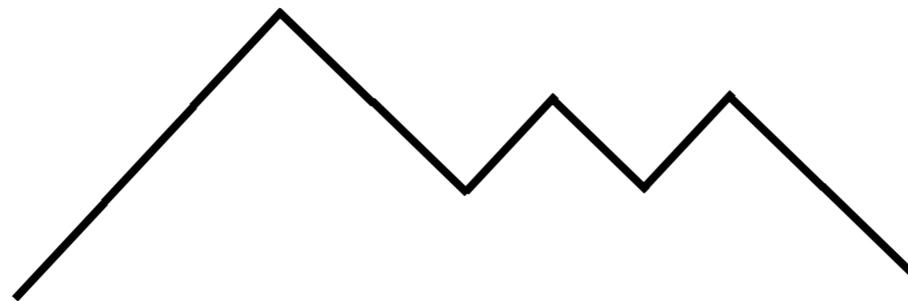
– Jean Perrin

# *Le mouvement brownien*

- 1827 : **Brown** observe le déplacement désordonné du pollen dans de l'eau ;
- 1905 : **Einstein** propose une explication de cette observation en utilisant les notions d'atomes et molécules ;
- 1908 : **Perrin** confirme expérimentalement l'existence d'atomes et molécules (prix Nobel 1926) ;
- 1923 : **Wiener** donne une construction mathématique du mouvement brownien.

# *Espace fonctionnel*

Application en arbres aléatoires :



Hauteur de l'arbre  $\leftrightarrow$  supremum de la fonction de contour

# *Espace des suites*

Une pierre de masse 1 se désagrège au fur et à mesure du temps (processus de fragmentation).

# *Espace des suites*

Une pierre de masse 1 se désagrège au fur et à mesure du temps (processus de fragmentation). L'espace  $E$  est celui des fonctions à valeurs dans

$$\{(x_i)_{i \geq 1} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} : x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots, x_1 + x_2 + \dots \leq 1\}$$

# *Espace des sous-ensembles compacts du disque*

On trace récursivement et aléatoirement des cordes dans le disque sans qu'elles ne se croisent.

$$K_n = 0.050 n^{(1/2)}$$

# *Espace des sous-ensembles compacts du disque*

On trace récursivement et aléatoirement des cordes dans le disque sans qu'elles ne se croisent.

L'espace  $E$  est celui des fonctions à valeurs dans l'ensemble des sous-ensembles compacts du disque unité fermé.

# *Espace des mesures (superprocessus)*

Des particules se déplacent dans  $\mathbb{R}^n$ , grossissent et se divisent.

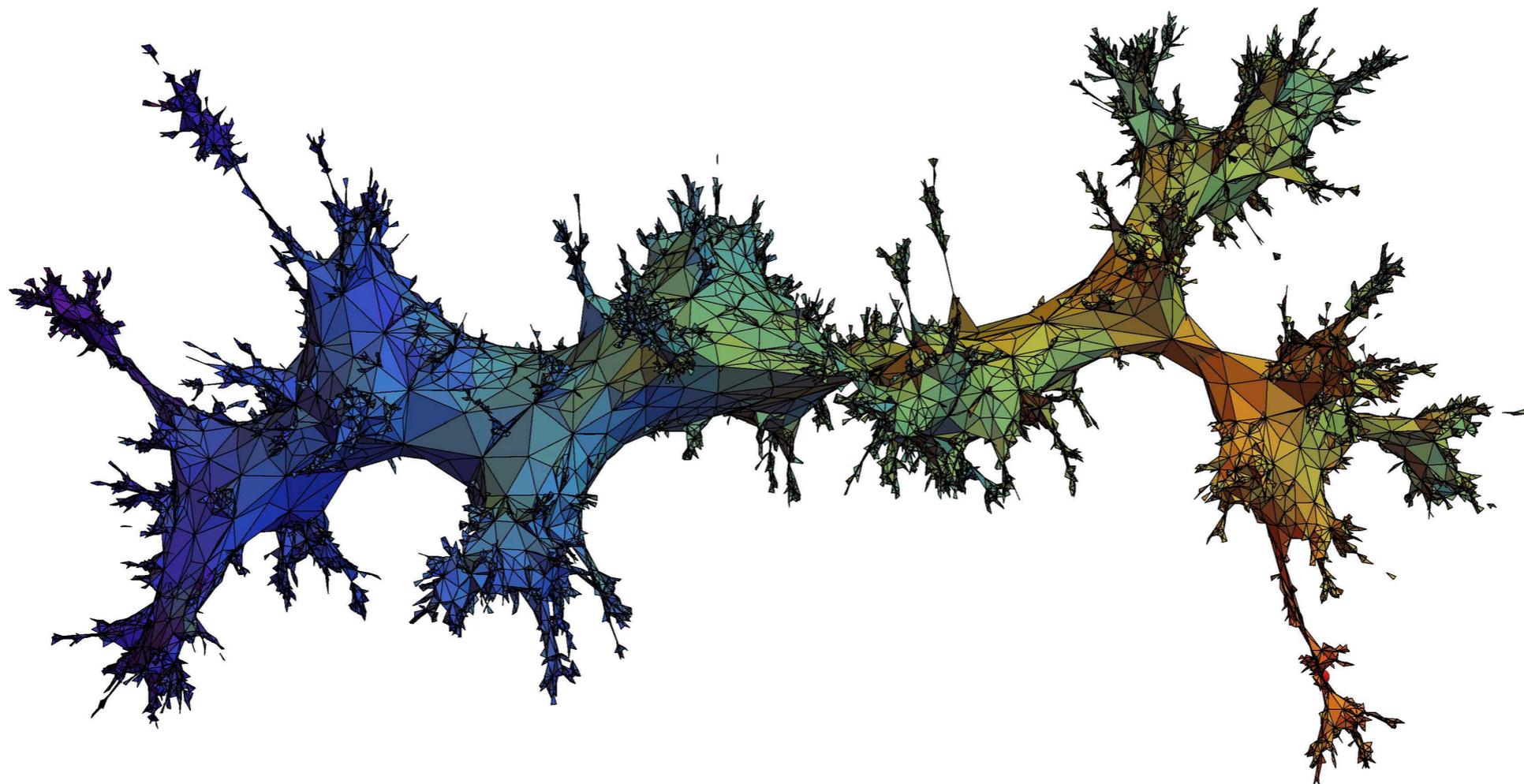
# *Espace des mesures (superprocessus)*

Des particules se déplacent dans  $\mathbb{R}^n$ , grossissent et se divisent.

L'espace  $E$  est celui des fonctions à valeurs dans l'espace des mesures finies sur  $\mathbb{R}^n$  (on représente une particule de masse  $m$  en  $x$  par  $m\delta_x$ ).

# *Espace d'espaces métriques*

On voit des graphes aléatoires comme des espaces métriques compacts aléatoires en équipant l'ensemble de leurs sommets de la distance de graphe.



L'espace  $E$  est l'ensemble des espaces métriques compacts à isométrie près.

# *Plan du cours et déroulement*

# *Plan du cours (10 séances)*

- Première partie ( $\simeq 3$  cours) : convergence étroite de mesures de probabilités dans des espaces métriques polonais (complets et ayant une suite dénombrable dense).

# *Plan du cours (10 séances)*

- Première partie ( $\simeq 3$  cours) : convergence étroite de mesures de probabilités dans des espaces métriques polonais (complets et ayant une suite dénombrable dense).

*Philosophie générale* : on utilisera d'abord un langage « théorie de la mesure » puis on interprétera en langage « probabiliste ».

# Plan du cours (10 séances)

- Première partie ( $\simeq 3$  cours) : convergence étroite de mesures de probabilités dans des espaces métriques polonais (complets et ayant une suite dénombrable dense).

*Philosophie générale* : on utilisera d'abord un langage « théorie de la mesure » puis on interprétera en langage « probabiliste ».

- Seconde partie ( $\simeq 5$  cours) : convergence étroite dans des espaces fonctionnels.

# Plan du cours (10 séances)

- Première partie ( $\simeq 3$  cours) : convergence étroite de mesures de probabilités dans des espaces métriques polonais (complets et ayant une suite dénombrable dense).

*Philosophie générale* : on utilisera d'abord un langage « théorie de la mesure » puis on interprétera en langage « probabiliste ».

- Seconde partie ( $\simeq 5$  cours) : convergence étroite dans des espaces fonctionnels.
- Troisième partie ( $\simeq 2$  cours) : mesures aléatoires de Poisson

# Plan du cours (10 séances)

- Première partie ( $\simeq 3$  cours) : convergence étroite de mesures de probabilités dans des espaces métriques polonais (complets et ayant une suite dénombrable dense).

*Philosophie générale* : on utilisera d'abord un langage « théorie de la mesure » puis on interprétera en langage « probabiliste ».

- Seconde partie ( $\simeq 5$  cours) : convergence étroite dans des espaces fonctionnels.
- Troisième partie ( $\simeq 2$  cours) : mesures aléatoires de Poisson

Certaines séances comprendront une partie TD.

# Plan du cours (10 séances)

- Première partie ( $\simeq 3$  cours) : convergence étroite de mesures de probabilités dans des espaces métriques polonais (complets et ayant une suite dénombrable dense).

*Philosophie générale* : on utilisera d'abord un langage « théorie de la mesure » puis on interprétera en langage « probabiliste ».

- Seconde partie ( $\simeq 5$  cours) : convergence étroite dans des espaces fonctionnels.
- Troisième partie ( $\simeq 2$  cours) : mesures aléatoires de Poisson

Certaines séances comprendront une partie TD.

Syllabus plus précis sur la page web du cours :

<http://www.cmap.polytechnique.fr/~kortchemski/M2/>

# *Déroulement*

- premier cours le 24 septembre.

# *Déroulement*

- premier cours le 24 septembre.
- Vacances de la Toussaint : pas de cours les 22/10 et 29/10

# *Déroulement*

- premier cours le 24 septembre.
- Vacances de la Toussaint : pas de cours les 22/10 et 29/10
- Dernier cours le 10 décembre.

# Déroulement

- premier cours le 24 septembre.
- Vacances de la Toussaint : pas de cours les 22/10 et 29/10
- Dernier cours le 10 décembre.

Évaluation :

# Déroulement

- premier cours le 24 septembre.
- Vacances de la Toussaint : pas de cours les 22/10 et 29/10
- Dernier cours le 10 décembre.

Évaluation :

 un DM (à faire pendant les vacances de la Toussaint) et un examen final.

# Déroulement

- premier cours le 24 septembre.
- Vacances de la Toussaint : pas de cours les 22/10 et 29/10
- Dernier cours le 10 décembre.

Évaluation :

↗ un DM (à faire pendant les vacances de la Toussaint) et un examen final.

Note finale :

$$\max \left( \text{exam}, \frac{\text{exam} + \text{DM}}{2} \right).$$

Des notes de cours seront disponibles ainsi que les feuilles d'exercices, avec quelques corrigés.

Des notes de cours seront disponibles ainsi que les feuilles d'exercices, avec quelques corrigés.

Pour aller plus loin :

- P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, 2nd edition, Wiley, 1999,
- O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, 2nd edition, Probability and Its Applications, Springer-Verlag, 2001.
- J. F. C. Kingman, *Poisson Processes*, Clarendon Press et G. Last, M. Penrose, *Lectures on the Poisson Process*, Cambridge University Press