Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Feuille d'exercices (cours 9 et 10) : Mesures aléatoires de Poisson

Pour un espace mesuré $(E,\mathcal{E})$ tel que $\{x\} \in \mathcal{E}$ pour tout $x \in E$, on note $M_{atom}(E)$ l'ensemble des mesures de la forme $\sum_{i\in I} \delta_{x_i}$ avec I fini ou dénombrable, et $x_i \in E$ pour tout $i \in I$. On rappelle qu'un nuage poissonien (ou de manière équivalent une mesure aléatoire de Poisson) est une variable aléatoire à valeurs dans $M_{atom}(E)$.

Exercice 1. Soit M un nuage poissonnien d'intensité $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ sur $\mathbb{R}^2$. On note M_θ et M_R les nuages de Poisson sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{R}_+$ obtenus à partir de M en considérant les angles et les distances à l'origine des points de M. Donner les intensités de ces deux nuages. Sont-ils indépendants ?

Exercice 2. Soit M un nuage poissonnien sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité $\lambda(t)\mathrm{d}t$, avec $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $\int_0^\infty \lambda(t)\mathrm{d}t = \infty$.

1. Justifier qu'on peut écrire M sous la forme $M = \sum_{k=1}^\infty \delta_{T_k}$ où $0 < T_1 < T_2 < \cdots$ sont des variables aléatoires.
2. On pose $a(t) = \int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s$. Montrer que $M' = \sum_{k\geq 1} \delta_{a(T_k)}$ est un nuage poissonnien sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité $\mathrm{d}x$.

On suppose à partir de maintenant que $\lambda(t) = \frac{t}{1+t}$ pour $t \geq 0$.

3. Calculer la loi de T_1 et celle de (T_1, T_2).
4. Montrer que presque sûrement

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{T_n^2} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{T_n} = \infty.$$

5. Montrer que $T_{n+1} - T_n$ converge en loi quand $n \to \infty$ et préciser la loi limite.

Exercice 3. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ et N un nuage poissonien d'intensité $\mathrm{d}x \otimes \mu$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. On note $N = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{(X_n,V_n)}$ avec

$$\cdots < X_{-k} < \cdots < X_0 < 0 < X_1 < \cdots < X_\ell < \cdots,$$

et on voit N comme une distribution de particules sur la droite réelle, chaque particule n étant initialement en position X_n avec vitesse V_n.

(a) On pose $N_t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{(X_n+tV_n,V_n)}$. Montrer que N_t est encore un nuage poissonien d'intensité $\mathrm{d}x \otimes \mu$.

(b) On suppose $\int_{\mathbb{R}} |v|\mu(\mathrm{d}v) < \infty$. Soit T_n le temps (éventuellement négatif) auquel la particule n atteint 0 : $T_n = \frac{X_n}{V_n}$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{(T_n,V_n)}$ est une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dont on donnera l'intensité.

(c) Calculer $\mathbb{P}(\forall s \in [0,t], \forall n \in \mathbb{Z}, X_n + sV_n \notin [a,b])$ où $[a,b]$ est un intervalle fixé et déterminer la loi de $\inf\{t \geq 0 : \exists s \in [0,t], \exists n \in \mathbb{Z}, X_n + sV_n \in [a,b]\}$.

Exercice 4. Soit M un nuage poissonnien sur $\mathbb{R}^2$ d'intensité $\lambda\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ pour $\lambda > 0$, écrit sous la forme $M = \sum_{i\geq 1} \delta_{X_i}$ avec $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

1. Calculer la loi de $\inf_{i\geq 1}|X_i|$.
2. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ indépendantes de M. Montrer que $M' = \sum_{i\geq 1}\delta_{X_i+Y_i}$ a la même loi que M.
3. Soit maintenant $(R_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. réelles positives indépendantes de M. On considère l'ensemble aléatoire
$$A = \bigcup_{i\geq 1} B(X_i, R_i),$$
où $B(x,r)$ est la boule de centre x et de rayon r dans $\mathbb{R}^2$.
   (a) Calculer la loi du nombre de boules de A qui recouvrent un point donné $x \in \mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que si $\mathbb{E}[R_1^2] = \infty$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ on a presque sûrement $x \in A$.
   (c) En déduire que si $\mathbb{E}[R_1^2] = \infty$ alors $A = \mathbb{R}^2$.
   (d) Montrer que si $\mathbb{E}[R_1^2] < \infty$ alors $A \neq \mathbb{R}^2$ presque sûrement.
4. On suppose que $R_i = r > 0$. On note $\mathcal{C}(0)$ l'amas de l'origine, c'est-à-dire les points accessibles depuis l'origine par un chemin qui reste dans A.
   (a) On note $\mathbb{P}_{\lambda,r}$ la loi de A avec intensité $\lambda > 0$ et rayon $r > 0$. Montrer que
$$\mathbb{P}_{\lambda,r}(\mathcal{C}(0) \text{ non borné}) = \mathbb{P}_{1,\sqrt{\lambda}r}(\mathcal{C}(0) \text{ non borné}) = \mathbb{P}_{\lambda r^2,1}(\mathcal{C}(0) \text{ non borné}).$$
   (b) Montrer que $\mathbb{P}_{\lambda,r}(\mathcal{C}(0) \text{ non borné})$ est croissante en λ et en r.

Exercice 5. – *(Théorème de Rényi)* – Soit M une variable aléatoire à valeurs dans $M^s_{atom}(\mathbb{R}_+)$ (sous-ensemble des mesures $\mu \in M_{atom}(\mathbb{R}_+)$ dont les atomes sont deux à deux distincts), presque sûrement finie sur les compacts. On suppose que pour tout borélien A de $\mathbb{R}_+$ on a
$$\mathbb{P}(M(A) = 0) = e^{-\lambda(A)},$$
où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

(1) Soient $I_1, \ldots, I_m$ des intervalles deux à deux disjoints. Montrer que les événements $\{M(I_j) = 0 : 1 \leq j \leq m\}$ sont indépendants.

(2) Pour tout $n,k \geq 0$ on pose $D_{n,k} = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$. Soit J un sous-intervalle borné de $\mathbb{R}_+$, d'intérieur non vide. Pour $n \geq 0$, on note $K_n = \mathrm{Card}\{k \geq 0 : D_{n,k} \subseteq J\}$ et
$$M_n(J) = \sum_{k\geq 0 : D_{n,k}\subseteq J} \mathbb{1}_{\{M(D_{n,k})\neq 0\}}.$$
Déterminer la loi de $M_n(J)$ en termes de n et de K_n.

(3) Montrer que l'on a $M_n(J) \uparrow M(J)$ presque-sûrement lorsque $n \to \infty$ (on considérera les atomes de M dans J et on vérifiera dans un premier temps qu'ils sont tous distincts de $\inf J$ et $\sup J$) et en déduire la loi de $M(J)$.

(4) Soient $J_1, \ldots, J_k$ des sous-intervalles bornés deux à deux disjoints de $\mathbb{R}_+$. Montrer que les variables aléatoires $M(J_1), \ldots, M(J_k)$ sont indépendantes.

(5) On note $N_t = M([0,t])$, $t \geq 0$, le processus de comptage associé à M. Montrer que N est un processus de Poisson d'intensité 1. En déduire que M est une mesure de Poisson d'intensité $\lambda(\mathrm{d}x)$.

Exercice 6. Trouver une tribu $\mathcal{E}$ sur $[0,1]$ et une mesure de probabilité μ sur $([0,1],\mathcal{E})$ telle que $\mu(B) \in \{0,1\}$ pour tout $B \in \mathcal{E}$ mais telle que μ ne soit pas une masse de Dirac.