Feuille 6-7 : éléments de correction

Exercice 2 : $A_t^{(n)}$ est en gros $\int_0^t S_u^{(n)}\,du$ et $f \mapsto f \times f$ avec $F(t) = \int_0^t f(u)\,du$ est continue
$f \mapsto (f, F)$

Exercice 3 : Utiliser l'absolue continuité du pont brownien par rapport au mouvement brownien sur tout intervalle $[0,a]$ avec $a<1$, combiné avec le fait que si une mesure est absolument continue par rapport à une autre, tout événement de mesure nulle pour la seconde l'est aussi pour la première

Exercice 4 a) Notons $c = \mathbb{E}[X_1]$

Par LGN, pour ε fixé, p.s $\left|\frac{S_n}{n} - c\right| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$.

Si $K>0$ est fixé, $\sup\limits_{0\leq t\leq K} |S_t^{(n)} - ct| = \sup\limits_{0\leq t\leq K} \left|\frac{S_{nt}}{n} - ct\right|$

$$= \sup_{0<t\leq K} t\left|\frac{S_{nt}}{nt} - c\right|$$

$$= \sup_{0<t\leq \frac{N}{n}} t\left|\frac{S_{nt}}{nt} - c\right| + \sup_{\frac{N}{n}\leq t\leq K} t\left|\frac{S_{nt}}{nt} - c\right|$$

$$\leq \underbrace{\frac{N}{n} \max_{1\leq i\leq K} \left|\frac{S_i}{i} - c\right|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + K\varepsilon$$

D'où le résultat.