Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Feuille d'exercices (cours 4 et 5) : Espace des fonctions continues

1 Exercice à chercher pour le mardi 12 novembre

Cet exercice sera corrigé au début de la séance du mardi 12 novembre

Exercice 1. Pour tout $n \geq 0$, on se donne deux processus X^n, Y^n dans l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, définis sur un même espace de probabilités (qui peut éventuellement dépendre de n). On suppose que $X^n \to X$ et $Y^n \to Y$ en loi.

(1) Alix dit : la suite $((X^n, Y^n))_{n\geq 0}$ est une suite tendue dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})^2$. A-t-elle raison ?

(2) On voit maintenant le couple (X^n, Y^n) comme un unique processus

$$t \mapsto (X^n_t, Y^n_t), \qquad t \in [0,1]$$

dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^2)$. Billie dit : la suite $(X^n, Y^n)_{n\geq 0}$ est tendue dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^2)$? A-t-il raison ?

(3) On voit maintenant le couple (X^n, Y^n) comme une fonction $(X^n_s, Y^n_t)_{s,t\in[0,1]}$ de $\mathcal{C}([0,1]^2,\mathbb{R}^2)$. Camille dit : la suite $(X^n, Y^n)_{n\geq 0}$ est tendue dans $\mathcal{C}([0,1]^2,\mathbb{R}^2)$. A-t-elle raison ?

Corrigé :

(1) Oui ! Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Prokhorov, il existe deux compacts K_1, K_2 de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})^2$ tels que $\mathbb{P}(X^n \in K_1) \geq 1-\varepsilon$ et $\mathbb{P}(Y^n \in K_2) \geq 1-\varepsilon$ pour tout entier $n \geq 1$. Alors $K_1 \times K_2$ est un compact de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^2)$, et $\mathbb{P}((X^n, Y^n) \notin K_1 \times K_2) \geq 1-2\varepsilon$, ce qui montre que $((X^n, Y^n))_{n\geq 0}$ est une suite tendue dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})^2$.

(2) Oui ! Tout d'abord, il est clair que pour tout $t \in [0,1]$, $(X^n_t, Y^n_t)_{n\geq 1}$ est tendue. Pour contrôler le module de continuité, munissons $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_1$. Pour une fonction $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^2)$,

$$\omega(f,\delta) = \sup\{|f_1(s)-f_1(t)| + |f_2(s)-f_2(t)| : |s-t| \leq \delta\} \leq \omega(f_1,\delta) + \omega(f_2,\delta).$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(\omega((X^n, Y^n),\delta) \geq \eta) \leq \mathbb{P}(\omega(X^n,\delta) \geq \eta) + \mathbb{P}(\omega(Y^n,\delta) \geq \eta),$$

ce qui implique la tension.

Remarque. Alternativement, on peut utiliser le fait que la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})^2 & \to & \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^2) \\ (f,g) & \mapsto & (f(t), g(t))_{0\leq t\leq 1} \end{array}$$

est continue et la stabilité de la tension par composition par une fonction continue.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

(3) Oui ! Il suffit de vérifer que la fonction

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})^2 & \to & \mathcal{C}([0,1]^2,\mathbb{R}^2) \\ & & (f,g) & \mapsto & (f(s),g(t))_{0\leq s\leq 1, 0\leq t\leq 1} \end{array}$$

et le résultat en découlera par stabilité de la tension par composition par une fonction continue. À cet effet, en munissant $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_1$, et en notant $d(F,G) = \sup_{(s,t)\in[0,1]^2} \|F(s,t)-G(s,t)\|_1$ pour $F,G \in \mathcal{C}([0,1]^2,\mathbb{R}^2)$, on remarque que

$$d(\Phi(f,g),\Phi(f',g')) = \|f-f'\|_\infty + \|g-g'\|_\infty.$$

Il en découle que si $f_n \to f$ et $g_n \to g$, alors $\Phi(f_n,g_n) \to \Phi(f,g)$, d'où le résultat.

□

2 Exercices à chercher

Exercice 2. Soit $(X^n)_{n\geq 1}$ une suite de processus dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^k)$. On suppose que $X^n \Rightarrow X$ dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^k)$. Soit $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose

$$Y_n = \int_0^1 f(X_s^n)ds, \qquad Y = \int_0^1 f(X_s)ds.$$

Montrer que $(X^n, Y_n) \Rightarrow (X,Y)$.

Corrigé :
Corrigé plus tard en séance. □

Exercice 3. Soit X^n, X des processus croissants, continus de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $X^n \Rightarrow X$ si et seulement si X^n converge vers X au sens des marginales fini-dimensionnelles.

Corrigé :
Corrigé plus tard en séance. □

Exercice 4.

(1) Pour $a \geq 0$, l'application $f \mapsto t_a(f) = \inf\{t \geq 0 : f(t) \geq a\}$ définie sur $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ est-elle continue ? Sinon a-t-elle des points de continuité, et si oui, lesquels ?

(2) Soit $(X^n, n \geq 0)$ une suite de processus dans $\mathcal{C}$. On suppose que X^n converge en loi vers X pour la topologie uniforme sur les compacts. On suppose également que $X_0^n = 0$ pour tout $n \geq 1$. On note, pour $a \geq 0$,

$$T_a^n = t_a(X^n), \qquad T_a = t_a(X).$$

Discuter la convergence (ou non) de T_a^n vers T_a. Discuter le cas particulier où X est le mouvement brownien standard (cette dernière question se traite mieux avec la notion de propriété de Markov forte pour le mouvement brownien, voir le cours de calcul stochastique).

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Corrigé :
Corrigé plus tard en séance. □

3 Exercices additionnels

Exercice 5. Montrer que $\{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} : f \text{ est continue}\}$ n'est pas un élément de la tribu produit $\mathbb{R}^{\otimes[0,1]}$.

Indication. On pourra considérer une variable aléatoire U uniforme sur $[0,1]$ et considérer la fonction $X(t) = \mathbb{1}_{t \neq U}$ pour $0 \leq t \leq 1$.

Corrigé :
On raisonne par l'absurde en supposant que $A = \{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} : f \text{ est continue}\} \in \mathbb{R}^{\otimes[0,1]}$. La variable aléatoire $X = (X(t) : 0 \leq t \leq 1)$ a les mêmes marginales fini-dimensionales que la fonction nulle. Ella donc la même loi que la fonction nulle. Ainsi

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(0 \in A) = 1.$$

C'est absurde car X n'est pas continu. □

Exercice 6. Soit K un espace métrique compact et E un espace métrique. On note $C(K,E)$ l'espace des fonctions continues de K dans E muni de la distance $d(f,g) = \sup_{x \in K} d_E(f(x), g(x))$. Montrer que $\{B \cap C(K,E) : B \in \mathcal{B}(E)^{\otimes K}\}$ est la plus petite tribu sur $C(K,E)$ qui rend toutes les projections

$$\begin{array}{rccc} \Pi_x : & C(K,E) & \to & E \\ & f & \mapsto & f(x) \end{array}$$

pour $x \in K$ mesurables (autrement dit, la trace de la tribu produit $\mathcal{B}(E)^{\otimes K}$ sur $C(K,E)$ est la tribu produit sur $C(K,E)$).

Corrigé :
Notons $\mathcal{F} = \{B \cap C(K,E) : B \in \mathcal{B}(E)^{\otimes K}\}$, qui est bien une tribu sur $C(K,E)$.

Puisque pour tout $x \in K$ et $A \in \mathcal{B}(R)$, $\{f \in C(K,E) : f(x) \in A\} = \{f \in E^K : f(x) \in A\} \cap C(K,E) \in \mathcal{F}$, la tribu $\mathcal{F}$ rend bien les projections π_x mesurables.

Soit maintenant $\mathcal{G}$ une tribu sur $C(K,E)$ qui rend toutes les projections Π_x mesurables et considérons

$$\{B \in \mathcal{B}(E)^{\otimes K} : B \cap C(K,E) \in \mathcal{G}\}.$$

On vérifie que c'est une tribu qui contient les cylindres de $\mathcal{B}(E)^{\otimes K}$, elle est donc égale à $\mathcal{B}(E)^{\otimes K}$, ce qui conclut. □

Exercice 7. On considère un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration, c'est-à-dire d'une famille $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ de tribus telle que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pour tout $s \leq t$. On rappelle qu'une martingale est une famille de variables aléatoires $(X_t, t \geq 0)$ telle que $X_t \in L_1$ pour tout $t \geq 0$ et telle que pour tout $s \leq t$ on a $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Soit $(X^n, n \geq 0)$ une suite de processus de $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, intégrables et adaptés par rapport à des filtrations $(\mathcal{F}_t^n)$, c'est-à-dire que X_t^n est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t^n$ pour tout $t \geq 0$. On suppose que X^n est une $\mathcal{F}^n$-martingale, et que X^n converge en loi vers X dans $\mathcal{C}$. On suppose également que pour tout $t \in [0,1]$, $(X_t^n)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable.

Montrer que $(X_t, 0 \leq t \leq 1)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale où $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$.

Corrigé :

Tout d'abord, on remarque que par uniforme intégrabilité, pour tout $t \in [0,1]$, X_t est intégrable et $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0]$.

On fixe $s \leq t$. Soit $A \in \mathcal{F}_t$. Il s'agit de démontrer que

$$\mathbb{E}[X_s \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X_t \mathbb{1}_A].$$

Puisque l'ensemble des événements A satisfaisant à l'égalité précédente est une classe monotone, il suffit de démontrer que pour tout $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t$ et couples de réels $(a_i, b_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $a_i < b_i$ on a

$$\mathbb{E}\left[X_s \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i} < b_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n}\right] = \mathbb{E}\left[X_t \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i} < b_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n}\right].$$

À cet effet, on remarque que

$$\mathbb{E}\left[X_s^n \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i}^n < b_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n}\right] = \mathbb{E}\left[X_t^n \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i}^n < b_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n}\right]$$

car l'événement $\{a_i < X_{t_i}^n < b_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n\}$ appartient à $\sigma(X_{t_i}^n : 1 \leq i \leq n)$ est donc à $\mathcal{F}_t^n$.

D'après le théorème de représentation de Skorokhod, on peut supposer que $X^n \to X$ presque sûrement. On a alors les convergences presque sûres

$$X_s^n \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i}^n < b_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n} \quad \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \quad X_s \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i} < b_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n}$$

et

$$X_t^n \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i}^n < b_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n} \quad \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \quad X_t \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i} < b_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n}.$$

Par uniforme intégabilité, ces convergences ont également lieu en ajoutant des espérances, ce qui conclut. □

Exercice 8. Soit (E, d) un espace métrique.

(1) On suppose que E est séparable. Montrer que tout ouvert de E est union dénombrable de boules ouvertes.

(2–★) La réciproque est-elle vraie ?

Corrigé :

(1) Soit $(x_i)_{i \geq 1}$ une suite dénombrable dense de E. Si U est un ouvert, on écrit

$$U = \bigcup_{i, m \geq 1 : B(x_i, 1/m) \subset U} B(x_i, 1/m).$$

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

En effet, l'inclusion $\supset$ est claire. Pour l'inclusion $\subset$, soit $x \in U$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset U$. On considère alors x_i tel que $d(x,x_i) < \varepsilon/4$, de sorte que pour $m = \lfloor 1/(2\varepsilon) \rfloor$, $x \in B(x_i, 1/m)$ et $B(x_i, 1/m) \subset U$.

(2) Oui ! Supposons que tout ouvert de E est union dénombrable de boules ouvertes. On raisonne par l'absurde en supposant que (E,d) est non séparable.

Vérifions d'abord que qu'il existe $r > 0$ et un sous-ensemble $E_1 \subset E$ non dénombrable tel que pour tous $x \neq y$ dans E_1 on a $d(x,y) > r$. Pour chaque $r = 1/n$, considérons un sous-ensemble maximal (pour l'inclusion) de E ayant cette propriété (qui existe d'après le lemme de Zorn). S'ils sont tous dénombrables, alors clairement E est séparable.

Considérons maintenant l'ensemble $E_2 \subset E_1$ des points $x \in E_1$ pour lesquels il existe un point $y_x \in E$ tel que $0 < d(x,y_x) < r/10$.

Cas 1. E_2 est non dénombrable. On pose alors

$$U = \bigcup_{x \in E_2} B(x, d(x,y_x)),$$

qui est une union disjointe. Considérons une boule ouverte $B(z,a) \subset U$. Puisque $z \in U$, il existe $x \in E$ tel que $d(z,x) < d(x,y_x)$. Mais

$$r/5 > 2d(x,y_x) \geq d(x,z) + d(z,y_x) \geq d(z,y_x) > a$$

car $y_x \notin U$ et a fortiori $y_x \notin B(z,a)$. Par conséquent $B(z,a)$ est inclus dans une unique boule $B(x,d(x,y_x))$, et il faut donc un nombre non dénombrable de boules ouvertes pour couvrir U, absurde.

Cas 2. $E_3 = E_1 \backslash E_2$ est non dénombrable. Tout d'abord, remarquons que puisque tout point de E_3 est isolé, tout sous-ensemble de E_3 est ouvert. Pour tout $x \in E_3$, on définit $R(x)$ comme le rayon maximal d'une boule ouverte centrée en x et contenant un nombre au plus dénombrable de points, de sorte que $R(x) \geq r/10$ pour tout $x \in E_3$. Pour un point $x \in E_3$, on dit qu'une *étoile* centrée en x est une union $D = \{x\} \cup C$, où $C = \{z_1, z_2, \ldots\} \subset E_3$ est une suite dénombrable de points tels que $d(x,z_i) \to R(x)$. Puisque E_3 est non dénombrable, il existe une collection disjointe non dénombrable d'étoiles (pour le voir, on peut raisonner par l'absurde en utilisant le lemme de Zorn). Soit U l'ensemble de leurs centes. Puisque $U \subset E_3$, U est ouvert, et on peut donc l'écrire comme une union de boules ouvertes

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i)$$

avec $x_i \in U$ et $r_i > 0$. Il existe $i_0 \geq 1$ tel que $r_{i_0} > R(x_{i_0})$, sinon U serait dénombrable. Or, d'une part $B(x_{i_0}, r_{i_0})$ contient une infinité de points de l'étoile D centrée en x_{i_0}, mais d'autre part par construction $U \cap D = \{x_{i_0}\}$, contradiction.

$\square$