Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Feuille d'exercices (cours 2) : modes de convergence, uniforme intégrabilité, porte-manteau, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

1 Exercice à chercher pour le mardi 8 octobre

Cet exercice sera corrigé au début de la séance du mardi 8 octobre

Exercice 1. – *(Méthode des moments)*– Soit X une variable aléatoire réelle admettant des moments de tout ordre. On suppose que la loi de X est *caractérisée par ses moments*, c'est-à-dire que si Y est une variable aléatoire admettant des moments de tout ordre vérifie $\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Y^k]$ pour tout entier $k \geq 1$, alors X et Y ont même loi.

(1) Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles uniformément intégrables qui converge en loi vers Z. Montrer que $\mathbb{E}[Z_n] \to \mathbb{E}[Z]$.

(2) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles admettant des moments de tout ordre. On suppose que pour tout entier $k \geq 1$, $\mathbb{E}\left[X_n^k\right] \to \mathbb{E}\left[X^k\right]$. Montrer que $X_n \Rightarrow X$.

Remarque. Voir l'exercice 10 pour des conditions suffisantes pour qu'une variable aléatoire soit caractérisée par ses moments.

Corrigé :

(1) *Première façon.* D'après le théorème de représentation de Skorokhod (exercice 9), puisque le caractère uniformément intégrable ne dépend que des lois individuelles, on peut supposer que la convergence $Z_n \to Z$ a lieu presque sûrement (et a fortiori en probabilité). D'après un résultat du deuxième cours, cette convergence a aussi lieu dans L^1, ce qui donne le résultat.

Deuxième façon. On applique un argument de troncature. Soit $K \geq 0$. On définit $h_K(x) = x$ si $|x| \leq K$, $h_K(x) = K$ si $x > K$ et $h_K(x) = -K$ si $x < -K$, de sorte que h_K est continue et bornée par K. La convergence en loi $Z_n \Rightarrow Z$ implique

$$\mathbb{E}[h_K(Z_n)] \to \mathbb{E}[h_K(Z)].$$

Par ailleurs, comme $|x - h_K(x)| \leq |x|\mathbb{1}_{\{|x|>K\}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}\Big|\mathbb{E}[Z_n - Z]\Big| &\leq \mathbb{E}\Big[|Z_n - h_K(Z_n)|\Big] + \Big|\mathbb{E}[h_K(Z_n) - h_K(Z)]\Big| + \mathbb{E}\Big[|h_K(Z) - Z|\Big]\\ &\leq \mathbb{E}\Big[|Z_n|\mathbb{1}_{\{|Z_n|>K\}}\Big] + o(1) + \mathbb{E}\Big[|Z|\mathbb{1}_{\{|Z|>K\}}\Big].\end{aligned}$$

Combiné avec l'uniforme intégrabilité de $(Z_n^k)_{n\geq 1}$, ceci entraîne que

$$\limsup_{n\to\infty} \Big|\mathbb{E}[Z_n - Z]\Big| \leq \limsup_{K\to\infty} \mathbb{E}\Big[|Z|\mathbb{1}_{\{|Z|>K\}}\Big].$$

Vérifions que Z est intégrable.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Première façon. On a
$$E\left[|Z|\right] = \int_0^\infty \mathbb{P}(|Z| \geq u)\,\mathrm{d}u.$$
Or, par convergence en loi, pour presque tout u par rapport à la mesure de Lebesgue on a $\mathbb{P}(|Z_n| \geq u) \to \mathbb{P}(|Z| \geq u)$. Ainsi, d'après le lemme de Fatou :
$$\int_0^\infty \mathbb{P}(|Z| \geq u)\,\mathrm{d}u \leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty \mathbb{P}(|Z_n| \geq u)\,\mathrm{d}u = \liminf_{n\to\infty} E\left[|Z_n|\right] < \infty,$$
ce qui montre que Z est intégrable.

Deuxième façon. On écrit
$$\mathbb{E}[h_K(|Z|)] \leq \mathbb{E}[h_K(|Z|) - h_K(|Z_n|)] + \mathbb{E}[h_K(|Z_n|)] \leq \mathbb{E}[h_K(|Z|) - h_K(|Z_n|)] + \mathbb{E}[|Z_n|] + E\left[|Z_n|\mathbb{1}_{\{|Z_n|>K\}}\right].$$
En prenant la lim inf lorsque $n \to \infty$ puis en faisant $K \to \infty$, on conclut par uniforme intégrabilité et convergence monotone que $\mathbb{E}[|Z|] < \infty$.

(2) On montre la tension puis l'unicité de la limite.

Première étape : tension. Puisque $(\mathbb{E}[X_n^2])_{n\geq 2}$ converge, la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est tendue.

Seconde étape : unicité de la limite. Soit ϕ une extraction et Y une variable aléatoire telle que $X_{\phi(n)} \Rightarrow Y$. Soit $k \geq 1$ un entier. Puisque $(\mathbb{E}\left[(X_{\phi(n)})^{2k}\right])_{n\geq 1}$ converge, $(X^k_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable. Vérifions que
$$\mathbb{E}\left[|Y|^k\right] < \infty \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}\left[X^k_{\phi(n)}\right] \to \mathbb{E}\left[Y^k\right]. \tag{1}$$
Le lemme implique (1), et on obtient $\mathbb{E}\left[X^k\right] = \mathbb{E}\left[Y^k\right]$. Puisque X est caractérisée par ses moments, on en déduit que X et Y ont la même loi, ce qui conclut.

□

2 Exercices à chercher

Exercice 2. Soit (E,d) un espace métrique et $X, X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires à valeurs dans E. Montrer que si $X_n \to X$ presque sûrement ou en probabilité, alors $X_n \Rightarrow X$.

Corrigé :
Si $X_n \to X$ presque sûrement, et si $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction continue bornée, alors $f(X_n) \to f(X)$ presque sûrement et puisque $|f(X_n)| \leq \|f\|_\infty < \infty$, le théorème de convergence dominée implique $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$.

Si $X_n \to X$ en probabilité, soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\mathbb{E}[f(X_n)] \not\to \mathbb{E}[f(X)]$. Il existe alors $\epsilon > 0$ et une extraction ϕ telle que $|\mathbb{E}\left[f(X_{\phi(n)})\right] - \mathbb{E}[f(X)]| \geq \epsilon$ pour tout $n \geq 1$. Or $X_{\phi(n)}$ converge en probabilité vers X, il existe donc une extraction ψ telle que $X_{\phi(\psi(n))} \to X$ presque sûrement. Alors $f(X_{\phi(\psi(n))}) \to f(X)$ en loi et donc $\mathbb{E}\left[f(X_{\phi(\psi(n))}\right] \to \mathbb{E}[f(X)]$, absurde. □

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Exercice 3. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombre réels et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tels que $\delta_{x_n} \Rightarrow \mu$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mu = \delta_x$.

Corrigé :
Tout d'abord, la suite (x_n) est bornée. En effet, sinon, il existe une extraction ϕ telle que $|x_{\phi(n)}| \to \infty$. Par portemanteau, pour tout $A > 0$, on a alors $0 = \liminf_{n\to\infty} \delta_{x_{\phi(n)}}(]-A, A[) \geq \mu(]-A, A[)$ et donc $\mu(]-A, A[) = 0$ pour tout $A > 0$, absurde.

Vérifions que (x_n) a une seule valeur d'adhérence. Si $x_{\phi(n)} \to x$, alors par portemanteau pour tout $\epsilon > 0$, $1 = \limsup_{n\to\infty} \delta_{x_{\phi(n)}}([x-\epsilon, x+\epsilon[) \leq \mu([x-\epsilon, x+\epsilon])$. Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit que $\mu(\{x\}) = 1$. Puisqu'il ne peut pas y avoir $x \neq y$ tels que $\mu(\{x\}) = \mu(\{y\}) = 1$, ceci montre que $\mu = \delta_x$ où x est l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 1}$. □

3 Exercices additionnels (facultatif)

Exercice 4. Soit (E, d) un espace métrique, $x \in E$ un élément fixe et $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans E. Montrer que $X_n \Rightarrow x$ si et seulement si $X_n \to x$ en probabilité.

Corrigé :

$\boxed{\Longleftarrow}$ C'est une conséquence de l'exercice 2.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Pour $\varepsilon > 0$, en notant $B(x, \varepsilon)$ la boule ouverte centrée en x de rayon ε, de sorte que son complémentaire est fermé, par porte-manteau :

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \notin B(x,\varepsilon)) \leq \mathbb{P}(x \notin B(x,\varepsilon)) = 0.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(d(X_n, x) \geq \varepsilon) \to 0$, donc $X_n \to x$ en probabilité. □

Exercice 5. – *(Lemme de Slutsky)* – Soient E et F deux espaces métriques séparables, $y \in F$ un élement fixé, $X, X_1, X_2, \ldots$ et $(Y_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans respectivement E et F telles que $X_n \Rightarrow X$ et $Y_n \Rightarrow y$. Montrer que $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, y)$.

Corrigé :
Par hypothèse, $(X_n, y) \Rightarrow (X, y)$. En notant $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_E(x_1,x_2) + d_F(y_1,y_2)$, par hypothèse $d((X_n,y),(X_n,Y_n) = d_F(Y_n,y) \to 0$ en probabilité. Il s'ensuite que $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, y)$ d'après un résultat du cours. □

Exercice 6. – *(Produits dénombrables d'espaces métriques)* – Soit $((E_i, d_i))_{i\geq 1}$ une suite d'espaces métriques séparables. On pose $E = E_1 \times E_2 \times \cdots$ et

$$\forall x = (x_i)_{i\geq 1}, y = (y_i)_{i\geq 1} \in E, \qquad d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1 + d_n(x_n,y_n)}.$$

(1) Montrer que (E, d) est séparable.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

(2) Montrer qu'une suite $(x^n)_{n\geq 1} \in E$ converge vers $x \in E$ si et seulement si pour tout $k \geq 1$, $x^n_k \to x_k$ lorsque $n \to \infty$.

(3) Montrer que (E,d) est complet si tous les E_i le sont.

(4) Montrer que (E,d) est compact si tous les E_i le sont.

Corrigé :

Tout d'abord, on vérifie sans difficultés que d est une distance et que pour tous $N \geq 1, x, y \in E$,

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x,y)}{1+d_n(x,y)} \leq \frac{1}{2^{N-1}}.$$

(1) Soit D_i un ensemble dénombrable dense de E_i et $a_i \in E_i$ un élément fixé de E_i. On note D l'ensemble des suites qui s'écrivent sous la forme $(x_1,\ldots,x_K,a_{K+1},\ldots)$ avec $K \geq 1$ un entier, $x_1, \in D_1,\ldots,x_K \in D_K$. Soit $\varepsilon > 0$ et $y=(y_1,y_2,\ldots) \in E$. On choisit N tel que $1/2^{N-1} < \varepsilon$ et un élément $x=(x_1,\ldots,x_N,a_{K+1},\ldots) \in D$ tel que $d_i(x_i,y_i) \leq \varepsilon/N$ pour tout $1 \leq i \leq N$. On a alors $d(x,y) \leq 2\varepsilon$.

(2) $\boxed{\Longrightarrow}$ Cette implication provient immédiatement du fait que si $x=(x_1,x_2,\ldots)$ et $y=(y_1,y_2,\ldots)$, alors $d_i(x_i,y_i) \leq d(x,y)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $x^n_k \to x_k$ pour tout $k \geq 1$ lorsque $n \to \infty$. On choisit N tel que $1/2^{N-1} < \varepsilon$ et un entier n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $d_i(x^n_i, x_i) \leq \varepsilon/N$ pour tout $1 \leq i \leq N$. Alors $d(x^n,x) \leq 2\varepsilon$ pour $n \geq n_0$.

(3) Soit $(x^n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy de (E,d). Alors pour tout $k \geq i$, $(x^n_i)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans (E_i,d_i), donc converge vers un élément noté x_i. On en déduit que $x^n \to (x_1,x_2,\ldots)$ d'après la question précédente.

(4) Soit $(x^n)_{n\geq 1}$ une suite de (E,d). Pour $i \geq 1$, chaque suite $(x^n_i)_{n\geq 1}$ étant à valeurs dans E_i, elle admet une valeur d'adhérence. Par procédé diagonal, il existe une extraction ϕ telle que $(x_i^{\phi(n)})_{n\geq 1}$ converge pour tout $i \geq 1$ vers une valeur notée x_i. D'après la question (1), on en déduit que $x^{\phi(n} \to (x_1,x_2,\ldots)$.

□

Exercice 7. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi.

(1) Montrer que si $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$, la suite $(\max(X_1,\ldots,X_n)/n)_{n\geq 2}$ est uniformément intégrable.

(2) La réciproque est-elle vraie ?

Corrigé :

(1) Si $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$, on écrit

$$\left|\frac{\max(X_1,\ldots,X_n)}{n}\right| \leq \frac{\sum_{k=1}^n |X_k|}{n}.$$

D'après la loi des grands nombres, la suite $\frac{\sum_{k=1}^n |X_k|}{n}$ converge dans L^1 vers $\mathbb{E}[|X_1|]$. Elle est

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

donc uniformément intégrable, ce qui implique que la suite $(\frac{\max(X_1,\dots,X_n)}{n})_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable.

(2) Oui, si les variables aléatoires sont positives : le cas échéant, $0 \leq X_1/2 \leq \max(X_1, X_2)/2$ et donc $\mathbb{E}[X_1] < \infty$.

Non en général : par exemple, en prenant X_1 une variable aléatoire qui a pour densité $\frac{1}{|x|^2}\mathbb{1}_{x\leq -1}$, on voit que $\max(X_1,\dots,X_n)$ a pour densité $\frac{n}{|x|^{n+1}}\mathbb{1}_{x\leq -1}$, de sorte que

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{\max(X_1,\dots,X_n)}{n}\right|^{3/2}\right] = \frac{1}{n^{3/2}}\int_1^\infty \frac{nx^{3/2}}{x^{n+1}}\mathrm{d}x = \frac{1}{n^{3/2}}\frac{2n}{2n-3}.$$

La suite $(\frac{\max(X_1,\dots,X_n)}{n})_{n\geq 2}$ étant bornée dans $L^{3/2}$, elle est uniformément intégrable, bien que X_1 ne soit pas intégrable.

□

Exercice 8. – (Un exemple d'espace métrique non séparable) – Montrer que $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme n'est pas séparable.

Corrigé :

Considérons le sous-ensemble K de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ constitué des fonctions qui valent 0 ou 1 sur $\mathbb{Z}$. L'ensemble K est alors non dénombrable, et pour $f, g \in K$ on a $\|f-g\|_\infty \geq 1$. On en déduit que les boules ouvertes $(B(f,1/2))_{f\in K}$ sont disjointes, et donc $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ n'est pas séparable (car si on considère une suite, il existe une telle boule ouverte ne comportant pas d'élements de cette suite). □

Exercice 9. – (Théorème de représentation de Skorokhod pour $\mathbb{R}$) – Soit X une variable aléatoire réelle. On note F sa fonction de répartition et on pose, pour $0 \leq u \leq 1$, $F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}$. On rappelle (cf feuille d'exercices 1) que $F^{-1}(u) \leq x \iff u \leq F(x)$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en loi vers X.

(1) Vérifier que F^{-1} est une fonction croissante continue à gauche de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que pour tout $u \in]0,1[$, on a

$$F^{-1}(u) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n^{-1}(u) \leq \limsup_{n\to\infty} F_n^{-1}(u) \leq F^{-1}(u+),$$

où $F^{-1}(u+)$ est la limite à droite de F^{-1} en u.

(3) En déduire que si $X, X_1, X_2, \dots$ sont des variables aléatoires réelles telles que $X_n \Rightarrow X$, il existe un espace de probabilité et des variables aléatoires $X', X'_1, X'_2, \dots$ définies dessus telles que $X \stackrel{\text{loi}}{=} X'$, $X_i \stackrel{\text{loi}}{=} X'_i$ pour tout $i \geq 1$ et X'_n converge presque sûrement vers X' lorsque $n \to \infty$.

Corrigé :

(1) Pour la croissance de F^{-1}, si $u < v$ et si $F(x) \geq v$, on a alors $F(x) \geq u$, de sorte que $F^{-1}(u) \leq x$, et en passant à l'inf sur x on obtient $F^{-1}(u) \leq F^{-1}(v)$.

Pour le caractère continu à gauche, supposons que $u_n \uparrow u$ mais que $F^{-1}(u_n) \not\to F^{-1}(u)$.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $F^{-1}(u_n) \leq F^{-1}(u) - \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$. Donc $u_n \leq F(F^{-1}(u) - \varepsilon)$. En passant à la limite, $u \leq F(F^{-1}(u) - \varepsilon)$ et donc $F^{-1}(u) \leq F^{-1}(u) - \varepsilon$, absurde.

(2) Soit $0 \leq u \leq 1$.

Pour montrer que $\limsup_{n\to\infty} F_n^{-1}(u) \leq F^{-1}(u+)$, il suffit de vérifier que

$$F(x) \geq u + \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \limsup_{n\to\infty} F_n^{-1}(u) \leq x.$$

On montre la contraposée : supposons qu'il existe une extraction ϕ et $\eta > 0$ tels que $x + \eta \leq F_{\phi(n)}^{-1}(u)$ pour n assez grand. On choisit un point $x_0 \in [x, x+\eta[$ en lequel F est continu. Alors $F_{\varphi(n)}(x_0) < u$ pour n assez grand, et donc par convergence en loi de X_n vers X on en déduit que $F(x) \leq F(x_0) \leq u < u + \varepsilon$.

Pour montrer que $F^{-1}(u) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n^{-1}(u)$, considérons $x > \liminf_{n\to\infty} F_n^{-1}(u)$ un point de continuité de F. Il existe alors une extraction ϕ telle que $x \geq F_{\phi(n)}^{-1}(u)$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi, $F_{\phi(n)}(x) \geq u$ et en passant à la limite on obtient $F(x) \geq u$, et donc $x \geq F^{-1}(u)$. Ceci montre que $F^{-1}(u) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n^{-1}(u)$.

(3) Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$. On pose $X' = F^{-1}(U)$ et $X'_n = F_n^{-1}(U)$. D'après la feuille d'exercices 1, $X \stackrel{\text{loi}}{=} X'$ et $X_i \stackrel{\text{loi}}{=} X'_i$ pour tout $i \geq 1$. D'après la question précédente, $X'_n(\omega) \to X'(\omega)$ si F^{-1} est continue en $U(\omega)$. Puisque F^{-1} a un nombre au plus dénombrable de discontinuités, il s'ensuit que F^{-1} est presque sûrement continue en U et le résultat désiré en découle.

$\square$

Exercice 10. Soit X une variable aléatoire réelle admettant des moments de tout ordre. On pose $m_k = \mathbb{E}\left[X^k\right]$, $M_k = \mathbb{E}\left[|X|^k\right]$ pour $k \geq 1$ et $\phi(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]$ pour $t \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que le rayon de convergence de $\mathbb{E}\left[e^{zX}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k z^k}{k!}$ est non nul si et seulement si le rayon de convergence de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k z^k}{k!}$ est non nul.

On suppose dans la suite que ces rayons de convergence sont non nuls et on note R le rayon de convergence de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k z^k}{k!}$.

(2) Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\left| e^{ih} - \sum_{k=0}^{K} \frac{(ih)^k}{k!} \right| \leq \frac{|h|^{K+1}}{(K+1)!}.$$

(3) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $|h| < R$ on a le développement en série entière $\phi(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{(k)}(t)}{k!} h^k$.

(4) En déduire que la loi de X est caractérisée par ses moments.

Corrigé :

(1) L'implication $\boxed{\Longleftarrow}$ est claire car $|m_k| \leq M_k$. Pour l'implication $\boxed{\Longrightarrow}$, l'idée est de montrer que

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

les rayons de convergence de

$$\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{\infty} \frac{M_k z^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{\infty} \frac{M_k z^k}{k!}$$

sont non nuls. Pour le premier, ceci provient du fait que $m_k = M_k$ pour k pair, et pour le second de l'inégalité $|x|^{2j-1} \leq 1 + x^{2j}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $j \geq 1$.

(2) La formule de Taylor reste intégral donne pour $h \in \mathbb{R}$ et $K \geq 1$:

$$e^{ih} = \sum_{k=0}^{K} \frac{(ih)^k}{k!} + \frac{(ih)^{K+1}}{K!} \int_0^1 (1-u)^K e^{iuh} \mathrm{d}u,$$

de sorte que

$$\left| e^{ih} - \sum_{k=0}^{K} \frac{(ih)^k}{k!} \right| \leq \frac{|h|^{K+1}}{K!} \int_0^1 (1-u)^K \mathrm{d}u = \frac{|h|^{K+1}}{(K+1)!}.$$

(3) D'après la question précédente, on peut écrire

$$e^{i(t+h)x} = \sum_{k=0}^{K} \frac{(ihx)^k}{k!} e^{itx} + R_K(x,h)$$

avec $|R_K(x,h)| \leq \frac{|hx|^{K+1}}{(K+1)!}$. En particulier,

$$\phi(t+h) = \sum_{k=0}^{K} \frac{\mathbb{E}\left[(iX)^k e^{itX}\right]}{k!} h^k + \mathbb{E}\left[R_K(X,h)\right]$$

Or $\phi^{(k)}(t) = \mathbb{E}\left[(iX)^k e^{itX}\right]$, et par définition de R, si $|h| < R$, $\frac{|h|^{K+1} M_{K+1}}{(K+1)!} \to 0$, et le résultat s'ensuit.

(4) Puisque ϕ caractérise la loi de X, il suffit de montrer que ϕ s'exprime à partir des moments de X. D'après la question précédente, en prenant $t = 0$, ϕ s'exprime en fonction des moments de X sur $]-R,R[$. Puis, en redéveloppant en série entière autour de points proches de R et de $-R$, on en déduit que ϕ s'exprime en fonction des moments de X sur $]-2R,2R[$, et ensuite sur $]-nR,nR[$ pour tout $n \geq 1$ par récurrence, d'où le résultat.

Remarque. Il est possible de trouver des variables aléatoires X et Y, admettant des moments de tout ordre, telles que $\mathbb{E}\left[X^k\right] = \mathbb{E}\left[Y^k\right]$ pour tout $k \geq 1$ mais telles que leurs lois ne sont pas les mêmes. Un exemple explicite est donné par les densités

$$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right) \mathbb{1}_{x>0} \;\; \text{et} \;\; (1+\sin(2\pi \ln x)) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right) \mathbb{1}_{x>0}.$$

□

Exercice 11. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires uniformément intégrables. En reprenant la

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

construction de la fonction croissante $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{x\to\infty} \frac{\phi(x)}{x} = \infty$ et $\sup_{i\in I} \mathbb{E}[\phi(|X_i|)] < \infty$ (preuve du critère de de la Vallée Poussin), vérifier que ϕ peut être choisie de sorte que pour tout $x \geq 1$, $\phi'(2x) \leq 2\phi'(x)$, puis que ϕ peut être choisie de sorte que $\phi(x) \leq x^2$ pour $x \geq 1$.

Corrigé :

Rappelons que ϕ a été construit en posant

$$\phi(x) = \sum_{m\geq 1} (x - x_m)_+$$

avec $(x_m)_{m\geq 1}$ une suite strictement croissante telle que $\sup_{i\in I} \mathbb{E}\left[|X_i| \mathbb{1}_{|X_i|\geq x_m}\right] \leq 2^{-m}$.

Remarquons que ϕ est dérivable sauf en un nombre dénombrable de points, et alors

$$\phi'(x) = \#\{m \geq 1 : x_m \leq x\}.$$

En particulier,

$$\phi'(2x) = \phi'(x) + \#\{m \geq 1 : x < x_m \leq 2x\}$$

Ainsi, en prenant $x_1 = 1/2$ et en choisissant les (x_m) de sorte que $x_{m+1} > 2x_m$, on obtient pour $x \geq 1/2$:

$$\phi'(2x) \leq \phi'(x) + 1 \leq 2\phi'(x).$$

Ainsi, pour $x \geq 1$,

$$\phi(x) \leq \int_0^x 2\phi'(u/2)du = 4\phi(x/2).$$

En posant $k = \lceil \log_2(x) \rceil$, on obtient

$$\phi(x) \leq 4^k \phi\left(\frac{x}{2^k}\right) \leq 4^{1+\ln(x)/\ln(2)} \phi(1) \leq Cx^2$$

avec $C = 4\phi(1)$. Le résultat s'ensuit en prenant $\phi/(4\phi(1))$. □