Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Feuille d'exercices (cours 1) : convergence étroite dans $\mathbb{R}^k$

On note $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^k)$ l'ensemble des mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^k$, avec $k \geq 1$ un entier fixé, et $\Rightarrow$ désigne la convergence étroite dans cet espace.

1 Exercices à chercher pour le mardi 1 octobre

Ces exercices seront corrigés au début de la séance du mardi 1 octobre

Exercice 1. Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. On suppose que $\mu_n \Rightarrow \mu$. Y a-t-il des implications entre les assertions suivantes ?

(a) μ_n est à densité pour n assez grand

(b) μ est à densité

(c) μ_n est atomique pour n assez grand

(d) μ est atomique.

Rappelons qu'une mesure atomique est une mesure qui s'écrit $\sum a_i \delta_{b_i}$ pour des suites $a_i \in \mathbb{R}_+$ et $b_i \in \mathbb{R}$ et que dans $\mathbb{R}^n$ par mesure à densité on entend par rapport à la mesure de Lebesgue (l'usage est juste de dire à densité).

Exercice 2. Montrer qu'une famille $(\mu_i)_{i\in I}$ de mesures de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est tendue si et seulement si il existe une fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ telle que $f(x) \to \infty$ pour $|x| \to \infty$ et $\sup_{i\in I} \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_i < \infty$.

2 Exercices additionnels (facultatif)

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires réelles. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est tendue si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute suite $(c_n)_{n\geq 1}$ de réels strictement positifs telle que $c_n \to 0$ on a $\mathbb{P}(c_n|X_n| \geq \varepsilon) \to 0$.

Exercice 4. – *(Théorème de Riesz et lemme de Scheffé)* – Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, avec μ une mesure positive (pas forcément finie). Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$f_n \to f \quad \mu-\text{presque partout.} \tag{1}$$

(1) On suppose que la convergence (1) a lieu, que pour tout $n \geq 1$, $f_n \in L^p(\mu)$, $f \in L^p(\mu)$ et $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ quand $n \to \infty$. Démontrer que $f_n \to f$ dans $L^p(\mu)$ (théorème de Riesz).

On pourra introduire la fonction $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$.

(2) Montrer le lemme de Scheffé :

$$\text{si (1)}, f_n \text{ et } f \text{ sont } \mu \text{ intégrables,} \quad f_n \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_E f_n d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_E f d\mu$$

alors $\displaystyle\int_E |f_n - f| d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

(3) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives qui converge presque sûrement vers X. On suppose que $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$. Montrer que X_n converge vers X dans L^1.

(4) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires réelles telles que pour tout $n \geq 1$, X_n a pour loi $f_n d\mu$ (i.e. sa loi a une densité f_n par rapport à μ). Montrer que si f_n converge μ-presque partout vers une densité de probabilité f, alors $X_n \Rightarrow X$, où X est une variable aléatoire de loi $f\,d\mu$.

Exercice 5. – (Transformée de Laplace) – Soit $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$. Sa transformée de Laplace est définie par l'intégrale $L_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tx}\mu(\mathrm{d}x)$ pour $t \geq 0$.

(1) Vérifier que L_μ est de classe C^∞ sur $]0,\infty[$.

(2) Montrer que pour tout $x > 0$ on a

$$\mu([0,x[) + \frac{1}{2}\mu(\{x\}) = \lim_{t\to\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor tx \rfloor} \frac{(-t)^k}{k!} L_\mu^{(k)}(t),$$

où $L_\mu^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de L_μ. En déduire que si $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$ ont même transformée de Laplace, alors $\mu = \nu$.

(3) Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$. On suppose que L_{μ_n} converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction L continue à droite en 0. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$ telle que $L = L_\mu$ et $\mu_n \Rightarrow \mu$.

On pourra s'inspirer de la preuve du théorème de Lévy.

Exercice 6. Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

(1) On suppose que $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est tendue. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall n \geq 1, \quad |x-y| \leq \delta \implies |\phi_{\mu_n}(x) - \phi_{\mu_n}(y)| \leq \varepsilon.$$

(en d'autres termes, la suite $(\phi_{\mu_n})_{n\geq 1}$ est uniformément équicontinue).

(2) On suppose que $\mu_n \Rightarrow \mu$. Montrer que ϕ_{μ_n} converge vers ϕ_μ uniformément sur tout compact. Donner un exemple où la convergence n'est pas uniforme.

(3) La réciproque de l'énoncé de la première question est-elle vraie, autrement dit est-ce que si la suite $(\phi_{\mu_n})_{n\geq 1}$ est uniformément équicontinue alors la suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est tendue ?

Exercice 7. Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ sans atomes. Montrer que $\mu_n \Rightarrow \mu$ si et seulement si $\sup_{s\in\mathbb{R}} |F_{\mu_n}(s) - F_\mu(s)| \to 0$.

Exercice 8. – (Théorème de Glivenko-Cantelli) – Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi μ. On considère $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{X_i}$ la mesure empirique de ces variables aléatoires. On note F_n la fonction de répartition de μ_n et F celle de μ. Le but de cet exercice est de le théorème de Glivenko-Cantelli :

$$\text{presque sûrement,} \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{s\in\mathbb{R}} |F_n(s) - F(s)| = 0. \qquad (\star)$$

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

(1) Montrer ($\star$) lorsque μ est la loi uniforme sur $[0,1]$.

Pour $0 \leq x \leq 1$, on pose $G(x) = \inf\{s \in \mathbb{R} : F(s) \geq x\}$ (appelé inverse généralisé de F). Il est possible de vérifier que G est croissante, continue à gauche en tout point. Soit $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

(2) (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [0,1]$ on a

$$F(t) \geq x \iff t \geq G(x). \tag{2}$$

(b) Montrer que $(G(Y_i))_{1 \leq i \leq n}$ sont des variables indépendantes de même loi μ.

(c) Montrer que F_n et $A_n \circ F$ ont même loi, où A_n est la fonction de répartition empirique des $Y_1, \ldots, Y_n$.

(3) En déduire ($\star$).

Exercice 9. – (Caractérisation des fonctions de répartition dans $\mathbb{R}^k$.) – Pour $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ et $y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ on note $x \leq y$ si $x_i \leq y_i$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Soit $F : \mathbb{R}^k \to [0,1]$ une fonction. On dit qu'elle est *continue à droite* si $F(x^n) \to F(x)$ lorsque $x^n \downarrow x$. On dit qu'elle est *propre* si $F(x) \to 1$ lorsque $\min_i x_i \to \infty$ et $F(x) \to 0$ lorsque $\min_i x_i \to 0$. On dit qu'elle est une *fonction de répartition* s'il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^k)$ telle que $F(x) = \mu(\{y \in \mathbb{R}^k : y \leq x\})$.

(1) Donner un exemple de fonction $F : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ continue à droite, propre, croissante en chacune de ses variables et qui n'est pas une fonction de répartition.

On dit que F est à *accroissements positifs* si pour tout pavé $]x,y] =]x_1,y_1] \times \cdots \times]x_k,y_k]$ on a $F(]x,y]) := \sum_u s(u)F(u) \geq 0$, où la somme est prise sur tous les coins u de $]x,y]$ et $s(u) = (-1)^p$ avec $p = \sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{u_i = y_i}$.

(2) Montrer que $F : \mathbb{R}^k \to [0,1]$ est une fonction de répartition si et seulement si elle est continue à droite, propre, et est à accroissements positifs.

Pour une preuve probabiliste de la réciproque, on pourra justifier l'existence pour tout $n \geq 1$ de mesures de probabilité μ_n à support dans $(2^{-n}\mathbb{Z})^k$) telles que $\mu_n(x/2^n) = F(]2^{-n}(x-1), 2^{-n}x])$ pour $x \in \mathbb{Z}^k$, et de variables aléatoires $(X^n)_{n \geq 1}$ telles que X^n soit de loi μ_n et $X^m - 2^{-m} < X^n \leq X^m$ pour tout $m < n$, et enfin considérer $X = \lim_{n \to \infty} X^n$.

Exercice 10. Soit (E,d) un espace métrique muni de sa tribu borélienne et $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est mesurable.

Indication. Pour $\varepsilon, \delta > 0$, on pourra vérifier que $U_{\varepsilon,\delta} := \{x \in E : \exists y, z \in B(x,\varepsilon), |f(y) - f(z)| > \delta\}$ est ouvert.