

Feuille d'exercices (cours 1) : convergence étroite dans \mathbb{R}^k

On note $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^k)$ l'ensemble des mesures de probabilités sur \mathbb{R}^k , avec $k \geq 1$ un entier fixé, et \Rightarrow désigne la convergence étroite dans cet espace.

1 Exercices à chercher pour le mardi 1 octobre

Ces exercices seront corrigés au début de la séance du mardi 1 octobre

Exercice 1. Soit $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de mesures de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. On suppose que $\mu_n \Rightarrow \mu$. Y a-t-il des implications entre les assertions suivantes ?

- | | |
|--|---|
| (a) μ_n est à densité pour n assez grand | (c) μ_n est atomique pour n assez grand |
| (b) μ est à densité | (d) μ est atomique. |

Rappelons qu'une mesure atomique est une mesure qui s'écrit $\sum a_i \delta_{b_i}$ pour des suites $a_i \in \mathbb{R}_+$ et $b_i \in \mathbb{R}$ et que dans \mathbb{R}^n par mesure à densité on entend par rapport à la mesure de Lebesgue (l'usage est juste de dire à densité).

Corrigé :

Non :

- si μ_n est à densité, μ peut aussi bien être à densité (prendre $\mu = \mu_n$) qu'atomique (prendre $\mu_n(dx) = 2n \mathbb{1}_{[-1/n, 1/n]}(x) dx$, qui converge étroitement vers δ_0), voire singulière par rapport à la mesure de Lebesgue (penser à l'escalier du diable).
- si μ_n est atomique, μ peut aussi bien être atomique (prendre $\mu = \mu_n$) ou bien à densité (prendre $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{i/n}$, qui converge étroitement vers la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$).

□

Exercice 2. Montrer qu'une famille $(\mu_i)_{i \in I}$ de mesures de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est tendue si et seulement si il existe une fonction mesurable $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ telle que $f(x) \rightarrow \infty$ pour $|x| \rightarrow \infty$ et $\sup_{i \in I} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_i < \infty$.

Corrigé :

⊆ Posons $C = \sup_{i \in I} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_i$. Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tel que $|f(x)| \geq C/(\varepsilon)$ pour $|x| \geq A$. On écrit, pour $i \in I$,

$$C \geq \int_{\mathbb{R}} f d\mu \geq \int_{\mathbb{R} \setminus [-A, A]} f d\mu \geq \frac{C}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R} \setminus [-A, A]} d\mu_i,$$

de sorte que $\mu_i(\mathbb{R} \setminus [-A, A]) \leq \varepsilon$.

⊇ Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs tels que pour tout $n \geq 1$ et $i \in I$ on ait

$$\mu_i(\mathbb{R} \setminus [-A_n, A_n]) \leq \frac{1}{n^3}.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que la suite (A_n) est strictement croissante et $A_n \rightarrow \infty$. On définit alors f par $f(x) = 0$ si $|x| < A_1$ et $f(x) = n$ si $A_n \leq |x| < A_{n+1}$, de sorte que f est mesurable, $f(x) \rightarrow \infty$, et pour $i \in I$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_i &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[-A_{n+1}, A_{n+1}] \setminus [-A_n, A_n]} f d\mu_i \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n \mu_i([-A_{n+1}, A_{n+1}] \setminus [-A_n, A_n]) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n \mu_i(\mathbb{R} \setminus [-A_n, A_n]) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

2 Exercices additionnels (facultatif)

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ des variables aléatoires réelles. Montrer que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est tendue si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute suite $(c_n)_{n \geq 1}$ de réels strictement positifs telle que $c_n \rightarrow 0$ on a $\mathbb{P}(c_n |X_n| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$.

Corrigé :

Supposons que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est tendue. Soit $\varepsilon > 0$ et $(c_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs telle que $c_n \rightarrow 0$. Soit $\eta > 0$. Par tension, il existe $M > 0$ tel que $\mathbb{P}(|X_n| \geq M) \leq \eta$. Pour n assez grand, $\varepsilon/c_n \geq M$, et alors

$$\mathbb{P}(c_n |X_n| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n| \geq M) \leq \eta,$$

d'où le résultat.

Réciproquement, raisonnons par l'absurde en supposant que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ n'est pas tendue. On peut alors trouver $\varepsilon > 0$ et une extraction $\phi(n)$ telle que $\mathbb{P}(|X_{\phi(n)}| \geq \varepsilon) \geq \varepsilon$ pour tout n . On définit alors la suite $(c_n)_{n \geq 1}$ en posant $c_{\phi(k)} = k$ pour tout $k \geq 1$ et $c_i = k - 1$ pour $\phi(k - 1) \leq i < \phi(k)$. Alors, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(c_{\phi(n)} |X_{\phi(n)}| \geq 1) \geq \varepsilon,$$

contradiction. □

Exercice 4. – (Théorème de Riesz et lemme de Scheffé) – Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, avec μ une mesure positive (pas forcément finie). Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables de E dans \mathbb{R} telles que :

$$f_n \rightarrow f \quad \mu - \text{presque partout.} \tag{1}$$

(1) On suppose que la convergence (1) a lieu, que pour tout $n \geq 1$, $f_n \in L^p(\mu)$, $f \in L^p(\mu)$ et $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$ quand $n \rightarrow \infty$. Démontrer que $f_n \rightarrow f$ dans $L^p(\mu)$ (théorème de Riesz).

On pourra introduire la fonction $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$.

(2) Montrer le lemme de Scheffé :

$$\text{si (1), } f_n \text{ et } f \text{ sont } \mu \text{ intégrables, } f_n \geq 0 \text{ et } \int_E f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_E f d\mu$$

$$\text{alors } \int_E |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- (3) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives qui converge presque sûrement vers X . On suppose que $\mathbb{E}[X_n] \rightarrow \mathbb{E}[X]$. Montrer que X_n converge vers X dans L^1 .
- (4) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ des variables aléatoires réelles telles que pour tout $n \geq 1$, X_n a pour loi $f_n d\mu$ (i.e. sa loi a une densité f_n par rapport à μ). Montrer que si f_n converge μ -presque partout vers une densité de probabilité f , alors $X_n \Rightarrow X$, où X est une variable aléatoire de loi $f d\mu$.

Corrigé :

- (1) Par inégalité triangulaire, on remarque que $|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^p \max(|f_n|^p, |f|^p) \leq 2^p (|f_n|^p + |f|^p)$ de sorte que $g_n \geq 0$. Appliquons le lemme de Fatou à g_n :

$$2^{p+1} \int_E |f|^p d\mu = \int_E (\liminf_{n \rightarrow \infty} g_n) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E 2^p (|f_n|^p + |f|^p) d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f|^p d\mu.$$

On en déduit que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f|^p d\mu \leq 0,$$

d'où le résultat.

- (2) C'est simplement le théorème de Riesz pour $p = 1$.
- (3) C'est simplement le lemme de Scheffé.
- (4) Soit $s \in \mathbb{R}$. On montre que $\mathbb{P}(X_n \leq s) \rightarrow \mathbb{P}(X \leq s)$. Pour cela, en notant $A =]-\infty, s]$, on remarque que

$$\left| \int_A f_n d\mu - \int_A f d\mu \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

ce qui conclut.

Remarque. La même preuve montre qu'en fait $\mathbb{P}(X_n \in A) \rightarrow \mathbb{P}(X \in A)$ pour tout borélien A . Ceci implique la convergence en loi, mais la réciproque n'est pas vraie (prendre par exemple à $\mu_n = \delta_{1/n} \Rightarrow \delta_0$ avec $A = \{0\}$).

□

Exercice 5. – (Transformée de Laplace) – Soit $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$. Sa transformée de Laplace est définie par l'intégrale $L_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tx} \mu(dx)$ pour $t \geq 0$.

- (1) Vérifier que L_μ est de classe C^∞ sur $]0, \infty[$.
- (2) Montrer que pour tout $x > 0$ on a

$$\mu([0, x[) + \frac{1}{2}\mu(\{x\}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\lfloor tx \rfloor} \frac{(-t)^k}{k!} L_\mu^{(k)}(t),$$

où $L_\mu^{(k)}$ désigne la dérivée k -ième de L_μ . En déduire que si $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$ ont même transformée de Laplace, alors $\mu = \nu$.

- (3) Soit $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de mesures de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$. On suppose que L_{μ_n} converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers une fonction L continue à droite en 0. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$ telle que $L = L_\mu$ et $\mu_n \Rightarrow \mu$.

On pourra s'inspirer de la preuve du théorème de Lévy.

Corrigé :

- (1) Ceci provient du fait que pour tout entier $k \geq 1$, la dérivée k -ième de $t \mapsto e^{-tx}$ est μ -intégrable, puisque la fonction $x \mapsto x^k e^{-tx}$ est bornée sur \mathbb{R}_+ pour tout $t > 0$. En particulier,

$$L_\mu^{(k)}(t) = (-1)^k \int_{\mathbb{R}_+} u^k e^{-tu} \mu(du).$$

- (2) Soit $x > 0$. D'après la question précédente et le théorème de Fubini,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor tx \rfloor} \frac{(-t)^k}{k!} L_\mu^{(k)}(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{k=0}^{\lfloor tx \rfloor} \frac{(tu)^k}{k!} e^{-tu} \mu(du).$$

Or

$$\sum_{k=0}^{\lfloor tx \rfloor} \frac{(tu)^k}{k!} e^{-tu} = \mathbb{P}(\text{Poisson}(tu) \leq \lfloor tx \rfloor).$$

Montrons que

$$\mathbb{P}(\text{Poisson}(tu) \leq \lfloor tx \rfloor) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{si } x < u \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = u \\ 1 & \text{si } x > u \end{cases}$$

en distinguant les trois cas :

- $x = u$: En notant $(Y_i)_{i \geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. de Poisson de paramètre x , on a

$$\mathbb{P}(\text{Poisson}(tx) \leq \lfloor tx \rfloor) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_1 + \dots + Y_{\lfloor t \rfloor} - \lfloor t \rfloor x + \text{Poisson}(\lfloor tx \rfloor - \lfloor t \rfloor x) - (\lfloor tx \rfloor - \lfloor t \rfloor x)}{\sqrt{tx}} \leq 0\right)$$

avec $\text{Poisson}(\lfloor tx \rfloor - \lfloor t \rfloor x)$ une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lfloor tx \rfloor - \lfloor t \rfloor x$ indépendante de $(Y_i)_{i \geq 1}$. D'après le TCL,

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y_1 + \dots + Y_{\lfloor t \rfloor} - \lfloor t \rfloor x}{\sqrt{tx}} \leq 0\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

En remarquant que $|\lfloor tx \rfloor - \lfloor t \rfloor x| \leq 1 + x$, on voit que $\frac{\text{Poisson}(\lfloor tx \rfloor - \lfloor t \rfloor x) - (\lfloor tx \rfloor - \lfloor t \rfloor x)}{\sqrt{tx}} \rightarrow 0$ en probabilité lorsque $t \rightarrow \infty$ (ceci provient par exemple de l'inégalité de Markov) donc d'après le lemme de Slutsky on conclut que $\mathbb{P}(\text{Poisson}(tx) \leq \lfloor tx \rfloor) \rightarrow \frac{1}{2}$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Remarque. Plus formellement, on a utilisé le fait que si $X_n + Y_n \Rightarrow Z$, avec $X_n \perp Y_n$ et Y_n qui converge en probabilité vers 0, alors $X_n \Rightarrow Z$.

– $x < u$: alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{Poisson}(tu) \leq \lfloor tx \rfloor) &= \mathbb{P}(tu - \lfloor tx \rfloor \leq tu - \text{Poisson}(tu)) \\ &\leq \mathbb{P}(tu - \lfloor tx \rfloor \leq |tu - \text{Poisson}(tu)|) \\ &\leq \frac{\text{Var}(\text{Poisson}(tu))}{(tu - \lfloor tx \rfloor)^2} \\ &\sim \frac{u}{t(u-x)^2} \end{aligned}$$

lorsque $t \rightarrow \infty$, qui tend donc vers 0.

– $x > u$: alors, de même,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{Poisson}(tu) \leq \lfloor tx \rfloor) &= 1 - \mathbb{P}(\text{Poisson}(tu) > \lfloor tx \rfloor) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\text{Poisson}(tu) - tu > \lfloor tx \rfloor - tu) \\ &\geq 1 - \mathbb{P}(|\text{Poisson}(tu) - tu| > \lfloor tx \rfloor - tu) \end{aligned}$$

et

$$\mathbb{P}(|\text{Poisson}(tu) - tu| > \lfloor tx \rfloor - tu) \leq \frac{\text{Var}(\text{Poisson}(tu))}{(\lfloor tx \rfloor - tu)^2} \sim \frac{u}{t(x-u)} \rightarrow 0.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor tx \rfloor} \frac{(tu)^k}{k!} e^{-tu} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{[0,x]}(u) + \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\{x\}}(u).$$

En utilisant le théorème de convergence dominée, on conclut que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \sum_{k=0}^{\lfloor tx \rfloor} \frac{(tu)^k}{k!} e^{-tu} \mu(du) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+} (\mathbb{1}_{[0,x]}(u) + \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\{x\}}(u)) \mu(du) = \mu([0, x]) + \frac{1}{2} \mu(\{x\}).$$

Supposons maintenant que $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$ ont même transformée de Laplace. Notons D l'ensemble des atomes de μ et de ν , qui est au plus dénombrable. Alors d'après le résultat précédent, $\mu([x, y]) = \nu([x, y])$ pour tous $x, y \in \mathbb{R} \setminus D$. Puisque $\mathbb{R} \setminus D$ est dense, on en déduit que μ et ν coïncident sur tout intervalle ouvert et donc $\mu = \nu$ par application du lemme des classes monotones.

- (3) On remarque tout d'abord que si $\mu_n \Rightarrow \mu$, alors L_{μ_n} converge simplement vers μ (la fonction $x \mapsto e^{-tx}$ étant continue bornée sur \mathbb{R}_+).

Il suffit de montrer que $(\mu_n)_{n \geq 1}$ est tendue. En effet, on conclut alors la preuve comme pour le théorème de Lévy : soit μ la limite en loi le long d'une sous-suite ϕ_o (qui existe par tension). On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$, une extraction ϕ et une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée telle que $|\mu_{\phi(n)}(f) - \mu(f)| \geq \varepsilon$. Par tension, il existe une extraction ψ telle que $\mu_{\phi \circ \psi(n)} \Rightarrow \nu$ pour une certaine mesure $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Comme $L_{\mu_{\phi \circ \psi(n)}}$ converge simplement vers L_ν , comme $L_{\mu_{\phi \circ \psi(n)}}$ converge simplement vers L_μ et comme L_{μ_n} converge simplement vers L , on en déduit que $L = L_\mu = L_\nu$ et donc $\mu = \nu$.

Pour montrer que $(\mu_n)_{n \geq 1}$ est tendue, on écrit

$$\begin{aligned} K \int_0^{1/K} (1 - L_{\mu_n}(t)) dt &= K \int_0^{1/K} \left(1 - \int_0^\infty e^{-tx} \mu(dx) \right) dt \\ &= K \int_0^\infty \int_0^{1/K} (1 - e^{-tx}) dt \mu_n(dx) \\ &\geq K \int_K^\infty \int_0^{1/K} (1 - e^{-tx}) dt \mu_n(dx) \\ &\geq K \int_K^\infty \int_0^{1/K} (1 - e^{-Kt}) dt \mu_n(dx) \\ &= \frac{1}{e} \mu_n([K, \infty[). \end{aligned}$$

Or par convergence dominée $K \int_0^{1/K} (1 - L_{\mu_n}(t)) dt \rightarrow K \int_0^{1/K} (1 - L_\mu(t)) dt$ et par continuité à droite $K \int_0^{1/K} (1 - L_\mu(t)) dt \rightarrow 0$ lorsque $K \rightarrow \infty$. On en déduit aisément la tension de $(\mu_n)_{n \geq 1}$. □

Exercice 6. Soit $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de mesures de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

(1) On suppose que $(\mu_n)_{n \geq 1}$ est tendue. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall n \geq 1, \quad |x - y| \leq \delta \implies |\phi_{\mu_n}(x) - \phi_{\mu_n}(y)| \leq \varepsilon.$$

(en d'autres termes, la suite $(\phi_{\mu_n})_{n \geq 1}$ est uniformément équicontinue).

(2) On suppose que $\mu_n \Rightarrow \mu$. Montrer que ϕ_{μ_n} converge vers ϕ_μ uniformément sur tout compact. Donner un exemple où la convergence n'est pas uniforme.

(3) La réciproque de l'énoncé de la première question est-elle vraie, autrement dit est-ce que si la suite $(\phi_{\mu_n})_{n \geq 1}$ est uniformément équicontinue alors la suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ est tendue ?

Corrigé :

(1) Soit $\varepsilon > 0$ et $M > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, $\mu_n(\mathbb{R} \setminus [-M, M]) \leq \varepsilon$. Par uniforme continuité, il

existe $\delta > 0$ tel que $|x - y| \leq \delta$ et $t \in [-M, M]$ impliquent $|e^{itx} - e^{ity}| \leq \varepsilon$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} |\phi_{\mu_n}(x) - \phi_{\mu_n}(y)| &= \int_{[-M, M]} |e^{itx} - e^{ity}| \mu_n(dt) + \int_{\mathbb{R} \setminus [-M, M]} |e^{itx} - e^{ity}| \mu_n(dt) \\ &\leq \varepsilon + 2\mu_n(\mathbb{R} \setminus [-M, M]) \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

- (2) On sait que ϕ_{μ_n} converge simplement vers ϕ_μ . C'est alors un résultat général : si une suite de fonctions réelles sur un compact est uniformément équicontinue et converge simplement, alors elle converge uniformément. Pour le démontrer dans notre cas précis, soit $\varepsilon > 0$ et K un compact. Soit $\delta > 0$ tel que l'implication de la première question est vraie. En passant à la limite, remarquons tout d'abord que $|x - y| \leq \delta$ implique $|\phi_\mu(x) - \phi_\mu(y)| \leq \varepsilon$. Par compacité, on peut recouvrir K par un nombre fini de boules $(B(x_i, \delta))_{1 \leq i \leq k}$. Soit N tel que $n \geq N$ implique $\max_{1 \leq i \leq k} |\phi_{\mu_n}(x_i) - \phi_\mu(x_i)| \leq \varepsilon$. Alors, pour $n \geq N$, soit $x \in K$. En notant $1 \leq i \leq k$ l'entier tel que $x \in B(x_i, \delta)$:

$$|\phi_{\mu_n}(x) - \phi_\mu(x)| \leq |\phi_{\mu_n}(x) - \phi_{\mu_n}(x_i)| + |\phi_{\mu_n}(x_i) - \phi_\mu(x_i)| + |\phi_\mu(x_i) - \phi_\mu(x)| \leq 3\varepsilon,$$

ce qui conclut.

En prenant par exemple $X_n = 1/n$ et $X = 0$, on a $\phi_{X_n}(t) = e^{it/n} \rightarrow \phi_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, mais $\|\phi_{X_n} - \phi_X\|_\infty = 2$ pour tout $n \geq 1$.

- (3) Oui : si $(\phi_{\mu_n})_{n \geq 1}$ est uniformément équicontinue, comme $|\phi_{\mu_n}(0)| = 1$, d'après le théorème d'Arzela-Ascoli, la suite $(\phi_{\mu_n})_{n \geq 1}$ a des sous-suites qui convergent uniformément sur tout compact. Par procédé diagonal (en se restreignant par exemple à des compacts $[-N, N]$ avec N entier), on trouve une extraction γ telle que $(\phi_{\mu_{\gamma(n)}})_{n \geq 1}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction limite continue ϕ . D'après le théorème de Lévy, ϕ est la fonction caractéristique d'une mesure de probabilité vers laquelle $(\phi_{\mu_{\gamma(n)}})_{n \geq 1}$ converge étroitement. □

Exercice 7. Soit $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de mesures de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ sans atomes. Montrer que $\mu_n \Rightarrow \mu$ si et seulement si $\sup_{s \in \mathbb{R}} |F_{\mu_n}(s) - F_\mu(s)| \rightarrow 0$.

Corrigé :

La réciproque est claire. Le sens direct est une conséquence du deuxième théorème de Dini. Donnons ici une approche dans le contexte de l'exercice. Fixons $k \geq 2$. L'application F_μ étant continue, croissante, de limite nulle en $-\infty$ et de limite 1 en ∞ , il existe des points $s_1 < \dots < s_{k-1}$ tels que $F_\mu(s_i) = \frac{i}{k}$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Par convergence simple, pour n assez grand, pour tout $1 \leq i \leq k$,

$$\frac{i-1}{k} \leq F_{\mu_n}(s_i) \leq \frac{i+1}{k}.$$

Par convention, posons $s_0 = -\infty$ et $s_k = \infty$. Il vient que pour tout n assez grand, pour tout $s \in \mathbb{R}$, en

choisissant s_i tel que $s_i \leq s < s_{i+1}$:

$$F_{\mu_n}(s) \leq F_{\mu_n}(s_{i+1}) \leq \frac{i+2}{k} = F_{\mu}(s_i) + \frac{2}{k} \leq F_{\mu}(s) + \frac{2}{k}$$

et de même

$$F_{\mu_n}(s) \geq F_{\mu_n}(s_i) \geq \frac{i-1}{k} = F_{\mu}(s_{i+1}) - \frac{2}{k} \geq F_{\mu}(s) - \frac{2}{k}.$$

Ainsi, pour n assez grand,

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} |F_{\mu_n}(s) - F_{\mu}(s)| \leq \frac{2}{k},$$

ce qui conclut. □

Exercice 8. – (*Théorème de Glivenko-Cantelli*) – Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi μ . On considère $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}$ la mesure empirique de ces variables aléatoires. On note F_n la fonction de répartition de μ_n et F celle de μ . Le but de cet exercice est de le théorème de Glivenko-Cantelli :

$$\text{presque sûrement, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in \mathbb{R}} |F_n(s) - F(s)| = 0. \quad (\star)$$

(1) Montrer (\star) lorsque μ est la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Pour $0 \leq x \leq 1$, on pose $G(x) = \inf\{s \in \mathbb{R} : F(s) \geq x\}$ (appelé inverse généralisé de F). Il est possible de vérifier que G est croissante, continue à gauche en tout point. Soit $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.

(2) (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [0, 1]$ on a

$$F(t) \geq x \iff t \geq G(x). \quad (2)$$

(b) Montrer que $(G(Y_i))_{1 \leq i \leq n}$ sont des variables indépendantes de même loi μ .

(c) Montrer que F_n et $A_n \circ F$ ont même loi, où A_n est la fonction de répartition empirique des Y_1, \dots, Y_n .

(3) En déduire (\star) .

Corrigé :

(1) On suit la même approche que pour l'exercice 7. Fixons $k \geq 2$. Il existe des points $s_1 < \dots < s_{k-1}$ tels que $F(s_i) = \frac{i}{k}$ pour tout $1 \leq i \leq k$. D'après la loi des grands nombres, presque sûrement, pour n assez grand, pour tout $1 \leq i \leq k$,

$$\frac{i-1}{k} \leq F_{\mu_n}(s_i) \leq \frac{i+1}{k}.$$

Par convention, posons $s_0 = -\infty$ et $s_k = \infty$. Il vient que pour tout n assez grand, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

en choisissant s_i tel que $s_i \leq s < s_{i+1}$:

$$F_{\mu_n}(s) \leq F_{\mu_n}(s_{i+1}) \leq \frac{i+2}{k} = F_{\mu}(s_i) + \frac{2}{k} \leq F_{\mu}(s) + \frac{2}{k}$$

et de même

$$F_{\mu_n}(s) \geq F_{\mu_n}(s_i) \geq \frac{i-1}{k} = F_{\mu}(s_{i+1}) - \frac{2}{k} \geq F_{\mu}(s) - \frac{2}{k}.$$

Ainsi, presque sûrement, pour n assez grand,

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} |F_{\mu_n}(s) - F(s)| \leq \frac{2}{k}.$$

Ceci étant vrai pour tout $k \geq 2$, ceci conclut.

(2) (a) Si $F(t) \geq x$, alors clairement $\inf\{s \in \mathbb{R} : F(s) \geq x\} \leq t$ et donc $G(x) \leq t$. Réciproquement, montrons que $F(t) < x$ implique $t < G(x)$. Puisque F est continue à droite, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $F(t + \varepsilon) < x$. On a alors $G(x) \geq t + \varepsilon > t$.

(b) Elles sont clairement indépendantes de même loi et d'après la question précédente, pour $0 \leq t \leq 1$,

$$\mathbb{P}(G(Y_1) \leq t) = \mathbb{P}(F(t) \geq Y_1) = F(t),$$

d'où le résultat.

(c) Sans perte de généralité, on peut supposer que $X_i = G(Y_i)$. On a alors

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \text{Card}(\{1 \leq i \leq n : G(Y_i) \leq t\}) = \frac{1}{n} \text{Card}(\{1 \leq i \leq n : Y_i \leq F(t)\}) = A_n(F(t)).$$

(3) D'après (1), on a

$$\text{presque sûrement, } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in \mathbb{R}} |A_n(s) - s| = 0,$$

ce qui implique

$$\text{presque sûrement, } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in \mathbb{R}} |A_n(F(s)) - F(s)| = 0,$$

et le résultat désiré en découle par (c). □

Exercice 9. – (*Caractérisation des fonctions de répartition dans \mathbb{R}^k .*) – Pour $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ et $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ on note $x \leq y$ si $x_i \leq y_i$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Soit $F : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, 1]$ une fonction. On dit qu'elle est *continue à droite* si $F(x^n) \rightarrow F(x)$ lorsque $x^n \downarrow x$. On dit qu'elle est *propre* si $F(x) \rightarrow 1$ lorsque $\min_i x_i \rightarrow \infty$ et $F(x) \rightarrow 0$ lorsque $\min_i x_i \rightarrow 0$. On dit qu'elle est une *fonction de répartition* s'il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^k)$ telle que $F(x) = \mu(\{y \in \mathbb{R}^k : y \leq x\})$.

(1) Donner un exemple de fonction $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ continue à droite, propre, croissante en chacune de ses variables et qui n'est pas une fonction de répartition.

On dit que F est à *accroissements positifs* si pour tout pavé $]x, y[=]x_1, y_1[\times \dots \times]x_k, y_k[$ on a $F(]x, y[) := \sum_u s(u)F(u) \geq 0$, où la somme est prise sur tous les coins u de $]x, y[$ et $s(u) = (-1)^p$ avec $p = \sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{u_i = y_i}$.

(2) Montrer que $F : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, 1]$ est une fonction de répartition si et seulement si elle est continue à

droite, propre, et est à accroissements positifs.

Pour une preuve probabiliste de la réciproque, on pourra justifier l'existence pour tout $n \geq 1$ de mesures de probabilité μ_n à support dans $(2^{-n}\mathbb{Z})^k$ telles que $\mu_n(x/2^n) = F(\lfloor 2^{-n}(x-1), 2^{-n}x \rfloor)$ pour $x \in \mathbb{Z}^k$, et de variables aléatoires $(X^n)_{n \geq 1}$ telles que X^n soit de loi μ_n et $X^m - 2^{-m} < X^n \leq X^m$ pour tout $m < n$, et enfin considérer $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X^n$.

Corrigé :

- (1) Prenons $F(x_1, x_2) = \mathbb{1}_{x_1 + x_2 \geq 0}$. S'il existe $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^k)$ telle que F soit sa fonction de répartition, on a alors $\mu([-1, 2] \times [-1, 2]) = F(2, 2) - F(2, -1) - F(-1, 2) + F(-1, -1) = -1$, absurde.
- (2) L'implication est claire (si F est la fonction de répartition de $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^k)$, la propriété d'être à accroissements positifs provient du fait que $\sum_u s(u)F(u) = \mu(\lfloor x, y \rfloor)$ – en reprenant les notations de l'énoncé).

Puisque F est propre et à accroissements positifs, il existe bien des mesures de probabilité μ_n à support dans $(2^{-n}\mathbb{Z})^k$ telles que $\mu_n(x/2^n) = F(\lfloor 2^{-n}(x-1), 2^{-n}x \rfloor)$ pour $x \in \mathbb{Z}^k$.

Ensuite, par construction, F est finiment additive sur les pavés, de sorte que pour $x \in \mathbb{Z}^k$ et $1 \leq m < n$:

$$\mu_m(2^{-m}\lfloor x-1, x \rfloor) = \mu_n(2^{-m}(x-1, x]).$$

Ceci permet de construire par récurrence une suite de variables aléatoires $(X^n)_{n \geq 1}$ telles que X^n soit de loi μ_n et $X^m - 2^{-m} < X^n \leq X^m$ pour tout $m < n$ à partir d'une suite de variables aléatoires i.i.d. uniformes sur $[0, 1]$. En effet, supposons X^1, \dots, X^n construites. Puisque

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1, \dots, i_k = 0 \text{ ou } 1} \mu_{n+1} \left(\left[X_1^n - \frac{i_1}{2^{n+1}}, X_1^n - \frac{i_1}{2^{n+1}} - 2^{-n-1} \right], \dots, \left[X_k^n - \frac{i_k}{2^{n+1}}, X_k^n - \frac{i_k}{2^{n+1}} - 2^{-n-1} \right] \right) \\ &= \mu_n \left(\left[X^n - \frac{1}{2^n}, X^n \right] \right), \end{aligned}$$

on construit X^{n+1} sachant X^n de sorte que pour $i_1, \dots, i_k = 0$ ou 1 ,

$$X^{n+1} = \left(X_1^n - \frac{i_1}{2^{n+1}}, \dots, X_k^n - \frac{i_k}{2^{n+1}} \right)$$

avec probabilité

$$\frac{1}{\mu_n \left(\left[X^n - \frac{1}{2^n}, X^n \right] \right)} \mu_{n+1} \left(\left[X_1^n - \frac{i_1}{2^{n+1}}, X_1^n - \frac{i_1}{2^{n+1}} - 2^{-n-1} \right], \dots, \left[X_k^n - \frac{i_k}{2^{n+1}}, X_k^n - \frac{i_k}{2^{n+1}} - 2^{-n-1} \right] \right).$$

On a bien $X^m - 2^{-m} < X^n \leq X^m$ pour tout $m < n$, ce qui permet par monotonie de définir $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X^n$.

Vérifions que la fonction de répartition de X est F . Soit $x \in \mathbb{R}^k$ dyadique. En particulier, $\mathbb{P}(X^n \leq x) = F(x)$. Par ailleurs, d'après le lemme de Fatou,

$$\mathbb{P}(X < x) = \mathbb{E} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{X^n < x} \right] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X^n < x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X^n \leq x) \leq F(x) = \mathbb{P}(X^n \leq x) \leq \mathbb{P}(X \leq x).$$

Ainsi,

$$F(x) \leq \mathbb{P}(X \leq x) < \mathbb{P}(X < x + 2^{-n}) \leq F(x + 2^{-n}).$$

En faisant tendre n vers l'infini, on conclut en utilisant la continuité à droite de F .

□

Exercice 10. Soit (E, d) un espace métrique muni de sa tribu borélienne et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est mesurable.

Indication. Pour $\varepsilon, \delta > 0$, on pourra vérifier que $U_{\varepsilon, \delta} := \{x \in E : \exists y, z \in B(x, \varepsilon), |f(y) - f(z)| > \delta\}$ est ouvert.

Corrigé :

Vérifions tout d'abord que $U_{\varepsilon, \delta}$ est bien ouvert. Si $x \in U_{\varepsilon, \delta}$ et $y, z \in B(x, \varepsilon)$ sont tels que $|f(y) - f(z)| > \delta$, alors pour tout x' tel que $d(x, x') < \varepsilon - \max(d(x, y), d(x, z))$ on a $x' \in U_{\varepsilon, \delta}$. En particulier, $U_{\varepsilon, \delta}$ est mesurable. On conclut en remarquant que l'ensemble des points de discontinuité de f s'écrit

$$\bigcup_{\substack{\delta > 0 \\ \delta \in \mathbb{Q}}} \bigcap_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \in \mathbb{Q}}} U_{\varepsilon, \delta}.$$

□