# Théorèmes limites et applications – MdA Paris-Saclay – Examen
Mardi 7 janvier 2024 – 9h-12h

*Les documents ne sont pas autorisés.*

*La précision et la clarté de la rédaction seront prise en compte dans l'évaluation.*

*Toute question peut être admise et utilisée ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.*

*Le sujet comporte 3 pages.*

## *Questions de cours.*

(1) Énoncer le critère $\varepsilon$-$\delta$ de l'uniforme integrabilité.

(2) Énoncer le théorème de représentation de Skorokhod.

(3) Énoncer le critère de tension de Kolmogorov.

* * *

*Exercice 1.* Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ et $X$ des variables aléatoires réelles. On pose $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ pour $n \geq 1$. On considère l'assertion suivante :

$$(A): \qquad \text{si} \quad X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X, \qquad \text{alors} \quad S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X.$$

Est-ce que l'assertion (A) est vrai pour les modes de convergence suivants ?

**(1)** Convergence p.s. **(2)** Convergence $L^1$

**(3)** Convergence en probabilité **(4)** Convergence en loi.

Justifiez vos réponses.

* * *

*Exercice 2.* Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires réelles. On suppose que pour tout $n \geq 1$, la loi de $X_n$ est absolument continue par rapport à la loi de $Y_n$ de densité $f_n$. Cela signifie que $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction mesurable telle que pour toute fonction mesurable positive $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ou pour toute fonction mesurable bornée $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on a :

$$\mathbb{E}[F(X_n)] = \mathbb{E}[f_n(Y_n)F(Y_n)].$$

**(1)** On suppose que $f_n(Y_n)$ converge en probabilité vers 1 lorsque $n \to \infty$ et que $Y_n$ converge en loi vers une variable aléatoire $Y$. Montrer que $X_n$ converge en loi vers $Y$.

**(2)** On suppose que $f_n$ est continue pour tout $n \geq 1$, que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f$, que $Y_n$ converge presque sûrement vers $Y$ et enfin que $\mathbb{E}[f(Y)] = 1$. Démontrer que $X_n$ converge en loi.

* * *

*Exercice 3.* Soient $(X_k^n)_{k,n\geq 1}$ et $(X_k)_{k\geq 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique $E$ telles que pour tout $k \geq 1$, presque sûrement pour tout $n$ assez grand on a $X_k^n = X_k$. Démontrer qu'il existe une suite (déterministe) $A_n \to \infty$ telle que

$$\mathbb{P}\Big(\text{pour tout } k \in \{1, 2, \ldots, A_n\} \text{ on a } X_k^n = X_k\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

* * *

*Petit problème 4.* L'objet de ce problème est d'étudier le comportement asymptotique d'une marche aléatoire qui peut parfois faire plusieurs sauts identiques à la suite.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme.

Les trois premières parties peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

**Première partie.** Soit $H \in [1/2, 1]$. On considère une variable aléatoire $W = (W_t)_{0 \le t \le 1}$ à valeurs dans $\mathcal{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

a) $(W_t)_{0 \le t \le 1}$ est un processus gaussien centré, c'est-à-dire que pour tout $k \ge 1$, pour tous $0 \le t_1 < \cdots < t_k \le 1$, pour tous $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $a_1 W_{t_1} + \cdots + a_k W_{t_k}$ est une variable aléatoire gaussienne centrée.

b) Pour tous $s, t \in [0, 1]$ on a $\mathbb{E}[W_s W_t] = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}\right)$.

La famille $(\mathbb{E}[W_s W_t])_{0 \le s, t \le 1}$ est appelée matrice de covariance de $W$. On rappelle que la loi d'un processus gaussien centré est caractérisée par sa matrice de covariance. En effet, si $(X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien (c'est-à-dire que toute combinaison linéaire des coordonnées suit une loi normale) centré sa fonction caractéristique est, en notant $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi_{(X_1, \ldots, X_n)}(u) = \mathbb{E}\left[e^{i(u_1 X_1 + \cdots + u_n X_n)}\right] = e^{-\frac{1}{2} u^\top K u},$$

où $^\top$ désigne la transposition et $K = (\mathbb{E}[X_i X_j])_{1 \le i, j \le n}$ est la matrice de covariance.

Enfin, on note $\mathbb{P}_H$ la loi de $W$ (l'existence de $\mathbb{P}_H$ sera démontrée plus tard dans ce problème).

$\boxed{(1)}$ Si $Z$ est une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ centrée de variance $\sigma^2$, démontrer que $\mathbb{E}[Z^4] = 3\sigma^4$.

$\boxed{(2)}$ On suppose l'existence de $\mathbb{P}_H$ pour tout $1/2 \le H \le 1$. Démontrer que l'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & [1/2, 1] & \to & (\mathcal{M}_1(\mathcal{C}), d_{\mathrm{LP}}) \\ & & H & \mapsto & \mathbb{P}_H \end{array}$$

est continue.

$\boxed{(3)}$ Démontrer l'existence de $\mathbb{P}_H$ dans le cas où $H = 1$.

**Deuxième partie.** Soit $H \in ]1/2, 1[$. Dans cette partie, $(Y_i)_{i \ge 1}$ sont des variables aléatoires réelles centrées de variance finie. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ pour $n \ge 1$ entier. Enfin, on définit $S_t$ pour $t \ge 0$ par interpolation linéaire et on pose pour $n \ge 1$ et $t \in [0, 1]$ :

$$Z_n(t) = \frac{S_{nt}}{n^H}.$$

$\boxed{(4)}$ On suppose dans cette question que les propriétés suivantes sont satisfaites :

a) pour tout $n \ge 1$ et $i \ge 1$, $S_{n+i} - S_n$ a la même loi que $S_i$.

b) $\mathbb{E}[S_n^2] = O(n^{2H})$ lorsque $n \to \infty$.

c) $(Z_n)$ converge en loi au sens des fini-dimensionnelles dans $\mathcal{C}$.

Démontrer que $Z_n$ converge en loi dans $\mathcal{C}$ lorsque $n \to \infty$.

$\boxed{(5)}$ On suppose dans cette question que les propriétés suivantes sont satisfaites :

a) $(Y_i)_{i \ge 1}$ est un vecteur gaussien.

b) pour tout $n \ge 1$ et $i \ge 1$, $S_{n+i} - S_n$ a la même loi que $S_i$.

c) $\mathbb{E}[S_n^2] \sim c \cdot n^{2H}$ lorsque $n \to \infty$, avec $c > 0$.

Démontrer que $Z_n$ converge en loi lorsque $n \to \infty$ vers $(\sqrt{c} \cdot W_t : 0 \le t \le 1)$ où la loi de $W$ a été définie dans la première partie.

**Troisième partie.** Soit $p \in [0,1]$. Dans cette partie, $(X_n)_{n\geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes telles que $X_1$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et pour $n \geq 2$ la variable aléatoire $X_n$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$. Pour $k, n \geq 1$, on pose $Y_n = (-1)^{X_1+\cdots+X_n}$, puis $S_0 = 0$ et $S_n = Y_1+\cdots+Y_n$. Ainsi, les sauts de la marche $(S_n)$ sont $\pm 1$, le premier saut est $\pm 1$ avec probabilités $1/2$ et pour $n \geq 2$ le $n$-ième saut est le $(n-1)$-ième saut avec probabilité $1-p$, et l'opposé du $(n-1)$-ième saut avec probabilité $p$. Enfin, on définit $S_t$ pour $t \geq 0$ par interpolation linéaire.

[Ajout après l'examen : erreur d'énoncé, pour $n \geq 2$ la variable aléatoire $X_n$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-p$, de sorte que pour $n \geq 2$ le $n$-ième saut est le $(n-1)$-ième saut avec probabilité $p$, et l'opposé du $(n-1)$-ième saut avec probabilité $1-p$. ]

$\boxed{6}$ Démontrer que pour tous $i, n \geq 1$ on a $\mathbb{E}[Y_i Y_{i+n}] = (2p-1)^n$.

$\boxed{7}$ Dans le cas où $p = 1/2$, démontrer que $(S_{nt}/\sqrt{n} : 0 \leq t \leq 1)$ converge en loi dans $\mathcal{C}$ vers la loi de $W$ définie dans la première partie pour $H = 1/2$.

**Quatrième partie.** Soit $H \in ]1/2, 1[$. Soit $P$ une variable aléatoire à valeurs dans $[1/2, 1]$ de loi

$$(1-H)2^{3-2H}(1-x)^{1-2H}\mathbb{1}_{[1/2,1]}(x)\mathrm{d}x.$$

Dans cette partie, on note $\mathbf{X} = (X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui, conditionnellement à $P$, sont indépendantes et telles que $X_1$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et pour $n \geq 2$ la variable aléatoire $X_n$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $P$. Formellement, si pour $p \in [0,1]$ $\mu_p$ est la loi d'une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli dont la première a paramètre $1/2$ et les autres ont paramètre $p$, la loi $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$ de $\mathbf{X}$ est caractérisée par le fait que pour tout événement $A$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ on a

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(A) = \int_0^1 \mu^p(A) \cdot (1-H)2^{3-2H}(1-x)^{1-2H}\mathbb{1}_{[1/2,1]}(x)\mathrm{d}x.$$

[Ajout après l'examen : même erreur d'énoncé, pour $n \geq 2$ la variable aléatoire $X_n$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-P$, et $\mu_p$ est la loi d'une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli dont la première a paramètre $1/2$ et les autres ont paramètre $1-p$]

Soit maintenant $(\mathbf{X}^k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de même loi que $\mathbf{X}$. Pour $k \geq 1$, on pose $\mathbf{X}^k = (X_n^k)_{n\geq 1}$. Pour $k, n \geq 1$, on pose $Y_n^k = (-1)^{X_1^k+\cdots+X_n^k}$.

$\boxed{8}$ Démontrer que lorsque $k \to \infty$, $\left(\frac{Y_{n+1}^1+\cdots+Y_{n+1}^k}{\sqrt{k}} : n \geq 1\right)$ converge en loi au sens des marginales fini-dimensionnelles vers un vecteur gaussien $(G_n)_{n\geq 1}$ centré qui vérifie :

a) pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}[G_n^2] = 1$.

b) pour tout $n \geq 1$ et $i \geq 1$, la quantité $r(n) = \mathbb{E}[G_i G_{i+n}]$ ne dépend pas de $i$ et on a on a

$$r(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{c_H^2}\frac{H(2H-1)}{n^{2-2H}} \qquad \text{avec } c_H = \sqrt{\frac{H(2H-1)}{\Gamma(3-2H)}}.$$

*Remarque.* On admettra que $\int_{1/2}^1 (2u-1)^n(1-u)^{1-2H}\mathrm{d}u \sim \frac{1}{c_H^2}\frac{H(2H-1)}{(1-H)2^{3-2H}} \cdot \frac{1}{n^{2-2H}}$ lorsque $n \to \infty$.

$\boxed{9}$ On pose $V_n = G_1 + \cdots + G_n$ pour $n \geq 1$ et on définit $V_t$ pour $t \geq 0$ par interpolation linéaire. Démontrer que

$$\left(c_H \frac{V_{nt}}{n^H} : 0 \leq t \leq 1\right) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{(loi)}}{\longrightarrow}} (W_t : 0 \leq t \leq 1),$$

où la loi de $W$ a été définie dans la première partie.

*Fin*