Théorèmes limites et applications – MdA Paris-Saclay – Examen
Mardi 7 janvier 2024 – 9h-12h

Les documents ne sont pas autorisés.

La précision et la clarté de la rédaction seront prise en compte dans l'évaluation.

Toute question peut être admise et utilisée ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Le sujet comporte 3 pages.

Questions de cours.

(1) Énoncer le critère ε-δ de l'uniforme integrabilité.

(2) Énoncer le théorème de représentation de Skorokhod.

(3) Énoncer le critère de tension de Kolmogorov.

* * *

Exercice 1. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ et X des variables aléatoires réelles. On pose $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ pour $n \geq 1$. On considère l'assertion suivante :

$$(A): \qquad \text{si} \quad X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X, \qquad \text{alors} \quad S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X.$$

Est-ce que l'assertion (A) est vrai pour les modes de convergence suivants ?

(1) Convergence p.s. **(2)** Convergence L^1

(3) Convergence en probabilité **(4)** Convergence en loi.

Justifiez vos réponses.

Corrigé :

(1) Vrai d'après le lemme de Césaro.

(2) Vrai, en écrivant par exemple

$$\mathbb{E}\left[|S_n - X|\right] \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|X_k - X|\right]}{n}$$

et en utilisant le lemme de Césaro.

(3) Faux, par exemple si $(X_n)_{n\geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes avec $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n$. Alors $X_n \to 0$ en probabilité. Vérifions que $S_n \nrightarrow 0$ en probabilité. Pour $\varepsilon \in]0, 1/2[$, on remarque que

$$\mathbb{P}(S_{2n} \geq \varepsilon) \geq \mathbb{P}(\exists k \in \{n, n+1, \ldots, 2n\} : X_k = k).$$

Mais

$$\mathbb{P}(\exists k \in \{n, n+1, \ldots, 2n\} : X_k = k) = 1 - \exp\left(\sum_{i=n}^{2n} \ln\left(1 - \frac{1}{i}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Ainsi $\mathbb{P}(S_{2n} \geq \varepsilon) \not\to 0$.

(4) Faux, en prenant par exemple $X_{2n} = -X_{2n+1} = N$ avec N une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

* * *

□

Exercice 2. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires réelles. On suppose que pour tout $n \geq 1$, la loi de X_n est absolument continue par rapport à la loi de Y_n de densité f_n. Cela signifie que $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction mesurable telle que pour toute fonction mesurable positive $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ou pour toute fonction mesurable bornée $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on a :

$$\mathbb{E}[F(X_n)] = \mathbb{E}[f_n(Y_n)F(Y_n)].$$

$\boxed{(1)}$ On suppose que $f_n(Y_n)$ converge en probabilité vers 1 lorsque $n \to \infty$ et que Y_n converge en loi vers une variable aléatoire Y. Montrer que X_n converge en loi vers Y.

$\boxed{(2)}$ On suppose que f_n est continue pour tout $n \geq 1$, que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, que Y_n converge presque sûrement vers Y et enfin que $\mathbb{E}[f(Y)] = 1$. Démontrer que X_n converge en loi.

Corrigé :

(1) Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $E_n = \{|f_n(Y_n) - 1| < \varepsilon\}$. Alors

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[F(X_n)] - \mathbb{E}[F(Y_n)]| &\leq \mathbb{E}\left[|F(X_n) - F(Y_n)|\mathbb{1}_{E_n^c}\right] + \mathbb{E}\left[|f_n(Y_n) - 1|F(Y_n)\mathbb{1}_{E_n}\right] \\ &\leq 2\|F\|_\infty \mathbb{P}(E_n^c) + \mathbb{E}\left[|f_n(Y_n) - 1|F(Y_n)\mathbb{1}_{E_n}\right] \\ &\leq 2\|F\|_\infty \mathbb{P}(E_n^c) + \varepsilon\|F\|_\infty \end{aligned}$$

ce qui montre que $\limsup_{n\to\infty} |\mathbb{E}[F(X_n)] - \mathbb{E}[F(Y_n)]| = 0$. Comme $\mathbb{E}[F(Y_n)] \to \mathbb{E}[F(Y)]$, il s'ensuit que $\mathbb{E}[F(X_n)] \to \mathbb{E}[F(Y)]$.

Autre solution. On montre que pour tout F fermé

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(Y \in F).$$

Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n \in F) &\leq \mathbb{P}(|f_n(Y_n) - 1| > \varepsilon) + \mathbb{P}(X_n \in F, |f_n(Y_n) - 1| \leq \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}(|f_n(Y_n) - 1| > \varepsilon) + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{Y_n \in F, |f_n(Y_n)-1|\leq\varepsilon} f_n(Y_n)\right] \\ &\leq \mathbb{P}(|f_n(Y_n) - 1| > \varepsilon) + (1+\varepsilon)\mathbb{P}(Y_n \in F) \\ &\leq \varepsilon + (1+\varepsilon)\mathbb{P}(Y_n \in F) \end{aligned}$$

pour n assez grand, ce qui conclut.

Autre solution. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathbb{E}[F(Y_n)] \to \mathbb{E}[F(Y)]$, il suffit de montrer que $|\mathbb{E}[F(X_n)] - \mathbb{E}[F(Y_n)]| \to 0$. Pour cela, on écrit

$$|\mathbb{E}[F(X_n)] - \mathbb{E}[F(Y_n)]| \leq \mathbb{E}\left[|f_n(Y_n) - 1|F(Y_n)\mathbb{1}_{E_n}\right] + \|F\|_\infty \mathbb{E}[] \leq \|F\|_\infty \mathbb{E}[|f_n(Y_n) - 1|].$$

Il suffit donc de démontrer que $f_n(Y_n) \to 1$ dans L^1. Ceci provient du théorème de représentation de Skorokhod, combiné avec le lemme de Scheffé car $\mathbb{E}[f_n(Y_n)] = 1$.

(2) Tout d'abord, f est continue comme limite uniforme de fonctions conitnues. Soit $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue bornée. On montre que

$$\mathbb{E}[F(X_n)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(Y)F(Y)],$$

ce qui montrera que X_n converge en loi vers une variable aléatoire absolument continue par rapport à la loi de Y de densité f.

Soit $M>0$ tel que $\mathbb{P}(|Y|\neq M)=1$ (on rappelle que le complémentaire de l'ensemble de ces M est dénombrable). On écrit

$$\mathbb{E}\left[F(X_n)\mathbb{1}_{|X_n|\leq M}\right]=\mathbb{E}\left[f_n(Y_n)F(Y_n)\mathbb{1}_{|Y_n|\leq M}\right].$$

Par hypothèse, $f_n(Y_n)F(Y_n)\mathbb{1}_{|Y_n|\leq M}$ converge presque sûrement vers $f(Y)F(Y)\mathbb{1}_{|Y|\leq M}$. Par ailleurs, puisque f est bornée sur tout compact, cette suite est bornée. On peut donc applique le théorème de convergence dominée et obtenir

$$\mathbb{E}\left[F(X_n)\mathbb{1}_{|X_n|\leq M}\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[f(Y)F(Y)\mathbb{1}_{|Y|\leq M}\right].$$

Ainsi, en prenant $F=1$ et en utilisant le fait que $\mathbb{E}[f(Y)]=1$, on obtient

$$\mathbb{P}(|X_n|\geq M) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[f(Y)\mathbb{1}_{|Y|>M}\right].$$

Enfin,

$$|\mathbb{E}[F(X_n)]-\mathbb{E}[f(Y)F(Y)]|\leq|\mathbb{E}\left[F(X_n)\mathbb{1}_{|X_n|\leq M}\right]-\mathbb{E}\left[f(Y)F(Y)\mathbb{1}_{|Y|\leq M}\right]|+\mathbb{P}(|X_n|\geq M)+\mathbb{E}\left[f(Y)F(Y)\mathbb{1}_{|Y|>M}\right],$$

de sorte que

$$\limsup_{n\to\infty}|\mathbb{E}[F(X_n)]-\mathbb{E}[f(Y)F(Y)]|\leq(1+\|F\|_\infty\mathbb{E}\left[f(Y)\mathbb{1}_{|Y|>M}\right],$$

dont la limsup en $M\to\infty$ tend vers 0, ce qui donne le résultat désiré. □

* * *

Exercice 3. Soient $(X_k^n)_{k,n\geq1}$ et $(X_k)_{k\geq1}$ des variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique E telles que pour tout $k\geq1$, presque sûrement pour tout n assez grand on a $X_k^n=X_k$. Démontrer qu'il existe une suite (déterministe) $A_n\to\infty$ telle que

$$\mathbb{P}\Big(\text{pour tout } k\in\{1,2,\dots,A_n\} \text{ on a } X_k^n=X_k\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Corrigé :

Par hypothèse, pour tout $k\geq1$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n_0\geq1}\bigcap_{n\geq n_0}\{X_k^n=X_k\}\right)=1.$$

L'union en n_0 étant croissante, on a donc $\mathbb{P}\left(X_k^n=X_k\right)\to1$ lorsque $n\to\infty$, et ce pour tout $k\geq1$.

Il existe donc une suite $(i_M)_{M\geq1}$ d'entiers qu'on peut supposer strictement croissante telle que pour tout $M \geq 1$ et $n \geq i_M$ on a

$$\sum_{k=1}^{M} \mathbb{P}\left(X_k^n \neq k\right) \leq \frac{1}{M}.$$

Pour tout $n \geq 1$, on pose alors $A_n = M$ si $i_M \leq n < i_{M+1}$. Vérifions que cette suite convient. Tout d'abord, on a clairement $A_n \to \infty$. On écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\{\text{pour tout } k \in \{1,2,\ldots,A_n\} \text{ on a } X_k^n = X_k\}^c\right) &\leq \sum_{k=1}^{A_n} \mathbb{P}\left(X_k^n \neq X_k\right)\\ &\leq \frac{1}{A_n},\end{aligned}$$

qui tend vers 0. □

***

Petit problème 4. L'objet de ce problème est d'étudier le comportement asymptotique d'une marche aléatoire qui peut parfois faire plusieurs sauts identiques à la suite.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme.

Les trois premières parties peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Première partie. Soit $H \in [1/2, 1]$. On considère une variable aléatoire $W = (W_t)_{0 \leq t \leq 1}$ à valeurs dans $\mathcal{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

a) $(W_t)_{0\leq t\leq 1}$ est un processus gaussien centré, c'est-à-dire que pour tout $k \geq 1$, pour tous $0 \leq t_1 < \cdots < t_k \leq 1$, pour tous $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $a_1 W_{t_1} + \cdots + a_k W_{t_k}$ est une variable aléatoire gaussienne centrée.

b) Pour tous $s, t \in [0,1]$ on a $\mathbb{E}[W_s W_t] = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}\right)$.

La famille $(\mathbb{E}[W_s W_t])_{0\leq s,t\leq 1}$ est appelée matrice de covariance de W. On rappelle que la loi d'un processus gaussien centré est caractérisée par sa matrice de covariance. En effet, si $(X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien (c'est-à-dire que toute combinaison linéaire des coordonnées suit une loi normale) centré sa fonction caractéristique est, en notant $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi_{(X_1,\ldots,X_n)}(u) = \mathbb{E}\left[e^{i(u_1X_1+\cdots+u_nX_n)}\right] = e^{-\frac{1}{2}u^\top K u},$$

où $^\top$ désigne la transposition et $K = (\mathbb{E}[X_iX_j])_{1\leq i,j\leq n}$ est la matrice de covariance.

Enfin, on note $\mathbb{P}_H$ la loi de W (l'existence de $\mathbb{P}_H$ sera démontrée plus tard dans ce problème).

(1) Si Z est une loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ centrée de variance σ^2, démontrer que $\mathbb{E}[Z^4] = 3\sigma^4$.

(2) On suppose l'existence de $\mathbb{P}_H$ pour tout $1/2 \leq H \leq 1$. Démontrer que l'application

$$\begin{array}{rccc}\Phi & : & [1/2,1] & \to & (\mathcal{M}_1(\mathcal{C}), d_{\mathrm{LP}})\\ & & H & \mapsto & \mathbb{P}_H\end{array}$$

est continue.

(3) Démontrer l'existence de $\mathbb{P}_H$ dans le cas où $H = 1$.

Corrigé :

(1) On a

$$\mathbb{E}[Z^4] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x$$

En intégrant par parties, il vient

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} 3x^2 \cdot \sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x = 3\sigma^4.$$

(2) Soit $H_n \to H$ avec $H \in [1/2, 1]$. On montre que $\mathbb{P}_{H_n}$ converge étroitement vers $\mathbb{P}_H$. On suppose que W^n a pour loi $\mathbb{P}_{H_n}$.
Convergence des marginales fini-dimensionnelles. Soient $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k \leq 1$. Pour démontrer la convergence en loi de $((W^n_{t_1}, \ldots, W^n_{t_k}))_{n \geq 1}$, vu la forme des fonctions caractéristiques des vecteurs gaussiens, il suffit de démontrer que les matrices de covariance convergent d'après le théorème de Lévy. On a

$$\mathbb{E}\left[W^n_{t_i} W^n_{t_j}\right] = \frac{1}{2}\left(t_i^{2H} + t_j^{2H} - |t_i - t_j|^{2H}\right) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{2}\left(t_i^{2H} + t_j^{2H} - |t_i - t_j|^{2H}\right),$$

de sorte que les marginales fini-dimensionnelles de $\mathbb{P}_{H_n}$ convergent vers celles de $\mathbb{P}_H$.
Tension. On utilise le critère de tension de Kolmogorov. On a déjà vu que les marginales uni-dimensionnelles convergent. En utilisant le fait que $\mathbb{E}[(W^n_u)^2] = u^{2H_n}$, on calcule

$$\mathbb{E}[(W^n_s - W^n_t)^2] = s^{2H_n} + t^{2H_n} - 2 \cdot \frac{1}{2}\left(s^{2H_n} + t^{2H_n} - |s-t|^{2H_n}\right) = |s-t|^{2H_n}.$$

Ainsi, lorsque $H > 1/2$, il existe des constantes $C, \eta > 0$ telles que pour n assez grand, pour tout $s, t \in [0, 1]$ on a

$$\mathbb{E}[(W^n_s - W^n_t)^2] \leq C|s-t|^{1+\eta},$$

ce qui montre la tension.
Lorsque $H = 1/2$, on calcule le moment d'ordre 4. D'après le calcul précédent, $W^n_s - W^n_t$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $|s-t|^{2H_n}$, et donc d'après la première question

$$\mathbb{E}[(W^n_s - W^n_t)^4] = 3|s-t|^{4H_n},$$

et on conclut comme dans le cas $H > 1/2$.

(3) Soit N une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. On pose $W_s = sN$ pour $0 \leq s \leq 1$. Ainsi $(W_s)_{0 \leq s \leq 1}$ est un vecteur gaussien de covariance $\mathbb{E}[W_s W_t] = st$, dont la loi est donc $\mathbb{P}_1$.

□

Deuxième partie. Soit $H \in]1/2, 1[$. Dans cette partie, $(Y_i)_{i \geq 1}$ sont des variables aléatoires réelles centrées de variance finie. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ pour $n \geq 1$ entier. Enfin, on définit S_t pour $t \geq 0$ par interpolation linéaire et on pose pour $n \geq 1$ et $t \in [0, 1]$:

$$Z_n(t) = \frac{S_{nt}}{n^H}.$$

$\boxed{(4)}$ On suppose dans cette question que les propriétés suivantes sont satisfaites :

a) pour tout $n \geq 1$ et $i \geq 1$, $S_{n+i} - S_n$ a la même loi que S_i.
b) $\mathbb{E}[S_n^2] = O(n^{2H})$ lorsque $n \to \infty$.
c) (Z_n) converge en loi au sens des fini-dimensionnelles dans $\mathcal{C}$.

Démontrer que Z_n converge en loi dans $\mathcal{C}$ lorsque $n \to \infty$.

$\boxed{(5)}$ On suppose dans cette question que les propriétés suivantes sont satisfaites :

a) $(Y_i)_{i\geq 1}$ est un vecteur gaussien.
b) pour tout $n \geq 1$ et $i \geq 1$, $S_{n+i} - S_n$ a la même loi que S_i.
c) $\mathbb{E}[S_n^2] \sim c \cdot n^{2H}$ lorsque $n \to \infty$, avec $c > 0$.

Démontrer que Z_n converge en loi lorsque $n \to \infty$ vers $(\sqrt{c} \cdot W_t : 0 \leq t \leq 1)$ où la loi de W a été définie dans la première partie.

Corrigé :

(4) Il suffit de vérifier le critère de tension de Kolmogorov. On montre qu'il existe $C > 0$ et $\eta > 0$ tels que pour n assez grand, pour tout $s, t \in [0, 1]$:

$$\mathbb{E}[|Z_n(s) - Z_n(t)|^2] \leq C|s-t|^{1+\eta}.$$

Soit $C' > 0$ tel que $\mathbb{E}[S_n^2] \leq C n^{2H}$ pour tout $n \geq 1$. Soient $s \leq t \in [0, 1]$.
Premier cas : $\lfloor ns \rfloor = \lfloor nt \rfloor = k$. Alors $S_{ns} - S_{nt} = n(t-s)(S_{k+1} - S_k)$ et donc

$$\mathbb{E}[|Z_n(s) - Z_n(t)|^2] = n^{2-2H}(t-s)^2 \mathbb{E}[(S_{k+1} - S_k)^2] = n^{2-2H}(t-s)^2 \mathbb{E}[S_1^2] \leq C(t-s)^2$$

pour une certaine constante C.
Deuxième cas : $\lfloor ns \rfloor < \lfloor nt \rfloor$. Posons $k = \lfloor ns \rfloor$ et $\ell = \lfloor nt \rfloor$. Alors en utilisant le fait

$$|S_{nt} - S_{ns}| \leq |S_{nt} - S_\ell| + |S_\ell - S_{k+1}| + |S_{k+1} - S_{ns}|,$$

le premier cas et l'inégalité $x \leq x^H$ pour $x \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(S_{ns} - S_{nt})^2]^{1/2} &\leq \mathbb{E}[(S_{nt} - S_\ell)^2]^{1/2} + \mathbb{E}[(S_\ell - S_{k+1})^2]^{1/2} + \mathbb{E}[(S_{k+1} - S_{ns})^2]^{1/2} \\
&\leq C(nt - \ell) + C'(\ell - (k+1))^H + C(k+1-ns) \\
&\leq C(nt - \ell)^H + C'(\ell - (k+1))^H + C(k+1-ns)^H \\
&\leq C(nt - ns)^H + C'(nt - ns)^H + C(nt - ns)^H \\
&\leq (2C + C')n^H (t-s)^H,
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\mathbb{E}[|Z_n(s) - Z_n(t)|^2] \leq C''(t-s)^{2H}.$$

Comme $2H > 1$, le critère de tension de Kolmogorov est vérifié.

(5) On vérifie les conditions de la question (4). Il suffit de vérifier que Z_n converge en loi au sens des fini-dimensionnelles dans $\mathcal{C}$ vers W. Pour cela, on remarque que $(Z_n(t) : 0 \leq t \leq 1)$ est un processus gaussien. Par ailleurs, vu la forme des fonctions caractéristiques des vecteurs

gaussiens, pour démontrer la convergence des fini-dimensionnelles il suffit de démontrer que les matrices de covariance convergent d'après le théorème de Lévy. Pour cela, fixons $0 \leq s < t < 1$ et calculons d'abord en utilisant la formule $xy = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - (x-y)^2)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{2H}}\mathbb{E}\left[S_{\lfloor ns \rfloor}S_{\lfloor nt \rfloor}\right] &= \frac{1}{2n^{2H}}\mathbb{E}\left[S^2_{\lfloor ns \rfloor}\right] + \frac{1}{2n^{2H}}\mathbb{E}\left[S^2_{\lfloor nt \rfloor}\right] - \frac{1}{2n^{2H}}\mathbb{E}\left[(S_{\lfloor nt \rfloor} - S_{\lfloor ns \rfloor})^2\right] \\
&= \frac{1}{2n^{2H}}\mathbb{E}\left[S^2_{\lfloor ns \rfloor}\right] + \frac{1}{2n^{2H}}\mathbb{E}\left[S^2_{\lfloor nt \rfloor}\right] - \frac{1}{2n^{2H}}\mathbb{E}\left[S^2_{\lfloor nt \rfloor - \lfloor ns \rfloor}\right] \\
&\to \frac{c}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}\right).
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que pour tout $t \in [0,1]$ on a $(S_{nt} - S_{\lfloor nt \rfloor})/n^H \to 0$ en probabilité. Ceci découle du lemme de Slutsky combiné avec le fait que

$$\frac{|S_{nt} - S_{\lfloor nt \rfloor}|}{n^H} \leq \frac{|S_{\lfloor nt \rfloor + 1}|}{n^H} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \quad 0$$

car $S_{\lfloor nt \rfloor + 1}$ a la même loi que S_1 par la condition b).

□

Troisième partie. Soit $p \in [0,1]$. Dans cette partie, $(X_n)_{n \geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes telles que X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et pour $n \geq 2$ la variable aléatoire X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Pour $k, n \geq 1$, on pose $Y_n = (-1)^{X_1 + \cdots + X_n}$, puis $S_0 = 0$ et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Ainsi, les sauts de la marche (S_n) sont ± 1, le premier saut est ± 1 avec probabilités $1/2$ et pour $n \geq 2$ le n-ième saut est le $(n-1)$-ième saut avec probabilité $1-p$, et l'opposé du $(n-1)$-ième saut avec probabilité p. Enfin, on définit S_t pour $t \geq 0$ par interpolation linéaire.

[Ajout après l'examen : erreur d'énoncé, pour $n \geq 2$ la variable aléatoire X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-p$, de sorte que pour $n \geq 2$ le n-ième saut est le $(n-1)$-ième saut avec probabilité p, et l'opposé du $(n-1)$-ième saut avec probabilité $1-p$.]

(6) Démontrer que pour tous $i, n \geq 1$ on a $\mathbb{E}[Y_i Y_{i+n}] = (2p-1)^n$.

(7) Dans le cas où $p = 1/2$, démontrer que $(S_{nt}/\sqrt{n} : 0 \leq t \leq 1)$ converge en loi dans $\mathcal{C}$ vers la loi de W définie dans la première partie pour $H = 1/2$.

Corrigé :

(6) On a
$$\mathbb{E}[Y_i Y_{i+n}] = \mathbb{E}\left[(-1)^{X_{i+1} + \cdots + X_{i+n}}\right] = \mathbb{E}\left[(-1)^{X_1}\right]^n = (p - (1-p))^n = (2p-1)^n.$$

(7) C'est une conséquence du théorème de Donsker : dans le cas $p = 1/2$, $(Y_n)_{n \geq 1}$ sont i.i.d. avec $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = -1) = 1/2$.

□

Quatrième partie. Soit $H \in]1/2, 1[$. Soit P une variable aléatoire à valeurs dans $[1/2, 1]$ de loi

$$(1-H)2^{3-2H}(1-x)^{1-2H}\mathbb{1}_{[1/2,1]}(x)\mathrm{d}x.$$

Dans cette partie, on note $\mathbf{X} = (X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui, conditionnellement à P, sont indépendantes et telles que X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et pour $n \geq 2$ la variable aléatoire X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre P. Formellement, si pour $p \in [0,1]$ μ_p est la loi d'une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli dont la première a paramètre $1/2$ et les autres ont paramètre p, la loi $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$ de $\mathbf{X}$ est caractérisée par le fait que pour tout événement A de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ on a

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(A) = \int_0^1 \mu^p(A) \cdot (1-H)2^{3-2H}(1-x)^{1-2H} \mathbb{1}_{[1/2,1]}(x) \mathrm{d}x.$$

[Ajout après l'examen : même erreur d'énoncé, pour $n \geq 2$ la variable aléatoire X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-P$, et μ_p est la loi d'une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli dont la première a paramètre $1/2$ et les autres ont paramètre $1-p$]

Soit maintenant $(\mathbf{X}^k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de même loi que $\mathbf{X}$. Pour $k \geq 1$, on pose $\mathbf{X}^k = (X^k_n)_{n\geq 1}$. Pour $k, n \geq 1$, on pose $Y^k_n = (-1)^{X^k_1+\cdots+X^k_n}$.

$\boxed{(8)}$ Démontrer que lorsque $k \to \infty$, $\left(\frac{Y^1_{n+1}+\cdots+Y^k_{n+1}}{\sqrt{k}} : n \geq 1\right)$ converge en loi au sens des marginales fini-dimensionnelles vers un vecteur gaussien $(G_n)_{n\geq 1}$ centré qui vérifie :

a) pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}[G_n^2] = 1$.

b) pour tout $n \geq 1$ et $i \geq 1$, la quantité $r(n) = \mathbb{E}[G_i G_{i+n}]$ ne dépend pas de i et on a on a

$$r(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{c_H^2} \frac{H(2H-1)}{n^{2-2H}} \qquad \text{avec } c_H = \sqrt{\frac{H(2H-1)}{\Gamma(3-2H)}}.$$

Remarque. On admettra que $\int_{1/2}^1 (2u-1)^n (1-u)^{1-2H} \mathrm{d}u \sim \frac{1}{c_H^2} \frac{H(2H-1)}{(1-H)2^{3-2H}} \cdot \frac{1}{n^{2-2H}}$ lorsque $n \to \infty$.

$\boxed{(9)}$ On pose $V_n = G_1 + \cdots + G_n$ pour $n \geq 1$ et on définit V_t pour $t \geq 0$ par interpolation linéaire. Démontrer que

$$\left(c_H \frac{V_{nt}}{n^H} : 0 \leq t \leq 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} (W_t : 0 \leq t \leq 1),$$

où la loi de W a été définie dans la première partie.

Corrigé :

(8) Tout d'abord, comme $\mathbb{P}\left(X^k_1 = 1\right) = \mathbb{P}\left(X^k_1 = -1\right) = 1/2$ on a $\mathbb{E}\left[Y^k_n\right] = 0$. Posons

$$G^k_n = \frac{Y^1_{n+1} + \cdots + Y^k_{n+1}}{\sqrt{k}}.$$

D'après le théorème central limite, pour tout $n \geq 1$, G^k_n converge en loi lorsque $k \to \infty$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$ fixé, la suite $(G^k_1, \ldots, G^k_n)_{k\geq 1}$ est tendue. Vérifions l'unicité de la limite en montrant que toute limite en loi le long d'une sous-suite est un vecteur gaussien d'une certaine covariance donnée.

Quitte à extraire, supposons que $(G^k_1, \ldots, G^k_n)_{k\geq 1}$ converge en loi vers $(G_1, \ldots, G_n)$. Alors pour tout $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ on a

$$a_1 G^k_1 + \cdots + a_n G^k_n = \frac{(a_1 Y^1_2 + \cdots + a_n Y^1_{n+1}) + \cdots + (a_1 Y^k_2 + \cdots + a_n Y^k_{n+1})}{\sqrt{k}},$$

qui converge en loi vers une loi normale d'après le théorème central limite, ce qui montre que $a_1 G_1 + \cdots + a_n G_n$ suit une loi normale. Pour trouver la matrice de covariance de $(G_1, \ldots, G_n)$ on remarque que pour tout $i \geq 1$, $(G_i^k)_{k \geq 1}$ est bornée dans L^4, donc pour $i \geq 1$ et $n \geq 0$:

$$\mathbb{E}\left[G_i^k G_{i+n}^k\right] \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[G_i G_{i+n}].$$

Mais par indépendance

$$\mathbb{E}\left[G_i^k G_{i+n}^k\right] = \mathbb{E}\left[Y_{i+1}^1 Y_{n+i+1}^1\right] = \mathbb{E}[Y_2^1 Y_{n+2}^1]$$

ne dépend pas de k ni de i.

D'après la question (5),

$$r(n) = \mathbb{E}[(2P-1)^n] = (1-H)2^{3-2H} \int_{1/2}^{1} (2u-1)^n (1-u)^{1-2H} \mathrm{d}u$$

et le résultat s'ensuit grâce à la remarque.

(9) On vérifie que les conditions de la question (5) sont satisfaites. On a déjà vu que $(G_n)_{n\geq 1}$ est un vecteur gaussien. Le fait que $V_{n+i} - V_n$ a la même loi que S_i provient du fait que $Y_2^1 + \cdots + Y_{i+1}^1$ a la même loi que $Y_{n+2}^1 + \cdots + Y_{n+i+1}^1$. Il reste à vérifier la condition (c). On calcule

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n^2] &= \mathbb{E}[(G_1 + \cdots + G_n)^2] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[G_i G_j\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r(|i-j|) \\
&= n r(0) + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} r(k).
\end{aligned}$$

.

Par comparaison série-intégrale,

$$\sum_{k=1}^{i} r(k) \underset{i\to\infty}{\sim} \frac{H}{c_H^2} i^{2H-1}$$

puis

$$2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_H^2} \frac{1}{H} i^{2H-1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{c_H^2} n^{2H}$$

de sorte que

$$r(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{c_H^2} n^{2H}$$

ce qui conclut.

Remarque. Le processus W s'appelle le *mouvement brownien fractionaire* ; ce problème est inspiré de l'article de Nathanaël Enriquez "A simple construction of the fractional Brownian motion." Stochastic Processes and their Applications 109.2 (2004) : 203-223.

□

Fin