Théorèmes limites et applications – MdA Paris-Saclay – Examen
Mardi 10 janvier 2023 – 9h-12h

Les documents ne sont pas autorisés.

La précision et la clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.

Toute question peut être admise et utilisée ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Le sujet comporte 3 pages.

Questions de cours.

(1) Donner la définition de la distance de Lévy-Prokhorov, et donner (sans preuves) quelques-unes de ses propriétés que vous connaissez.

(2) Énoncer le théorème de Donsker.

(3) On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des fonctions càdlàg de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie de Skorokhod introduite en cours. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{D}$ et soit $x \in \mathbb{D}$. Soit enfin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $x_n \to x$ dans $\mathbb{D}$. Démontrer que

$$\int_0^1 f(x_n(s))\mathrm{d}s \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x(s))\mathrm{d}s.$$

***

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $[0,1]$ et $p > 0$.

(1) On suppose que $\mathbb{E}[X_n] \to 1$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que pour tout $p > 0$, $\mathbb{E}[[X_n - 1|^p] \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

(2) On suppose que $\mathbb{E}[X_n] \to \alpha$ et $\mathbb{E}[X_n^2] \to \alpha^2$ avec $\alpha \in [0,1[$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que $\mathbb{E}[[X_n - \alpha|^p] \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Indication. Dans les deux cas, on pourra commencer par montrer que X_n converge en probabilité.

***

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$, X des variables aléatoires réelles. Soit D un ensemble dénombrable dense de $\mathbb{R}$.

(1) Alix dit : « si X_n converge en loi vers X lorsque $n \to \infty$, alors pour tout $u \in D$ on a $\mathbb{P}(X_n \leq u) \to \mathbb{P}(X \leq u)$ lorsque $n \to \infty$. » A-t-il raison ? Justifiez votre réponse.

(2) Billie dit : « si pour tout $u \in D$ on a $\mathbb{P}(X_n \leq u) \to \mathbb{P}(X \leq u)$ lorsque $n \to \infty$, alors X_n converge en loi vers X lorsque $n \to \infty$. » A-t-elle raison ? Justifiez votre réponse.

***

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un couple de variables aléatoires $(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)$ à valeurs dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})^2$ tel que X_ε a la même loi que X, Y_ε a la même loi que Y et $\mathbb{P}(\|X_\varepsilon - Y_\varepsilon\|_\infty > \varepsilon) < \varepsilon$. Montrer que X et Y ont même loi.

***

Petit problème 4. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme et $\mathbb{D}$ l'ensemble des fonctions càdlàg de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie de Skorokhod introduite en cours. Soit $(U_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. uniformes sur $[0,1]$. On pose pour $n \geq 1$ et $t \in [0,1]$:

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\mathrm{Card}(\{i \in \{1,2,\dots,n\} : U_i \leq t\}), \qquad B_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t).$$

L'objectif de ce problème est de montrer que B_n converge en loi dans $\mathbb{D}$ vers le pont brownien.

On dit qu'un vecteur aléatoire $(M_i)_{1\leq i\leq n}$ suit la loi multinomiale $\mathsf{M}(k, p_1, \dots, p_n)$ avec $k \geq 1$ et $0 \leq p_1, \dots, p_n \leq 1$ si

$$\mathbb{P}((M_1, \dots, M_n) = (m_1, \dots, m_n)) = \frac{k!}{\prod_{i=1}^n m_i!} \prod_{i=1}^k p_i^{m_i}$$

pour tous entiers positifs $m_1, \dots, m_n$ tels que $m_1 + \dots + m_n = k$.

On pose, pour $1 \leq j \leq n$:

$$N_j = \mathrm{Card}(\{i \in \{1,2,\dots,n\} : U_i \in [(j-1)/n, j/n]\}).$$

(1) Démontrer que $(N_1, \dots, N_n)$ suit une loi multinomiale et identifier ses paramètres.

Soit $(P_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. de Poisson de paramètre 1. On pose pour $0 \leq k \leq n$:

$$S_k = \sum_{i=1}^k (P_i - 1)$$

et on définit S_t pour $t \geq 0$ par interpolation linéaire. Soient enfin $\widehat{B}_n \in \mathcal{C}$ la fonction obtenue en interpolant linéairement B_n aux points $\{k/n, 0 \leq k \leq n\}$ et $\widehat{S}_n \in \mathcal{C}$ une variable aléatoire dont la loi est la loi conditionnelle de $(\frac{1}{\sqrt{n}} S_{nt})_{0\leq t\leq 1}$ sachant que $S_n = 0$.

(2) Démontrer que $\widehat{B}_n$ et $\widehat{S}_n$ ont même loi.

(3) Justifier que $\widehat{B}_n$ converge en loi dans $\mathbb{D}$ vers le pont brownien.

(4) Démontrer que $\sup_{0\leq t\leq 1} |\widehat{B}_n(t) - B_n(t)| \to 0$ en probabilité.

(5) Conclure.

***

Petit problème 5. Soit (E,d) un espace métrique **compact** muni de sa tribu borélienne. On note $\mathcal{M}_1(E)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur E. Pour $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ et $\varepsilon > 0$ on pose

$$I_\mu(\varepsilon) = \inf_{x\in E} \mu(\overline{B}(x,\varepsilon)),$$

où $\overline{B}(x,\varepsilon) = \{y \in E : d(x,y) \leq \varepsilon\}$ désigne la boule fermée de rayon ε centrée en x.

Première partie.

(1) Calculer $\lim_{M\to\infty} I_\mu(M)$.

(2) Montrer que I_μ est càdlàg.

(3) Montrer que si pour tout $x \in E$ on a $\mu(\{x\}) = 0$, alors $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} I_\mu(\varepsilon) = 0$.

(4) Camille dit : « La réciproque de l'énoncé de la question (3) est aussi vraie. ». A-t-il raison ? Justifiez votre réponse.

Deuxième partie. Soit $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}_1(E)$ et $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$.

(5) On suppose que μ_n converge étroitement vers μ. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\limsup_{n \to \infty} I_{\mu_n}(\varepsilon) \leq I_\mu(\varepsilon).$$

On dit qu'une mesure de probabilité sur E est *de support plein* si la masse qu'elle donne à tout ouvert est strictement positive.

(6) On suppose que μ_n converge étroitement vers μ. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(a) μ est de support plein ;

(b) $I_\mu(\varepsilon) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$;

(c) $\liminf_{n \to \infty} I_{\mu_n}(\varepsilon) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Troisième partie. On suppose dans la suite que $(M_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $(\mathcal{M}_1(E), d_{LP})$ et que M est une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathcal{M}_1(E), d_{LP})$.

(7) On suppose que M_n converge en loi vers M. Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) M est presque sûrement de support plein ;

(b) pour tous $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ il existe $\delta, N > 0$ tels que

$$\forall n \geq N, \quad \mathbb{P}\Big(I_{M_n}(\varepsilon) < \delta\Big) < \varepsilon'.$$

(8) Dominique dit : « M_n converge en loi vers M si et seulement si sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}_+^*$, I_{M_n} converge en loi vers I_M pour la topologie de Skorokhod. » A-t-elle raison ? Justifiez votre réponse.

Fin