Théorèmes limites et applications – MdA Paris-Saclay – Examen

Mardi 10 janvier 2023 – 9h-12h

Les documents ne sont pas autorisés.

La précision et la clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.

Toute question peut être admise et utilisée ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Le sujet comporte 3 pages.

Questions de cours.

(1) Donner la définition de la distance de Lévy-Prokhorov, et donner (sans preuves) quelques-unes de ses propriétés que vous connaissez.

(2) Énoncer le théorème de Donsker.

(3) On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des fonctions càdlàg de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie de Skorokhod introduite en cours. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{D}$ et soit $x \in \mathbb{D}$. Soit enfin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $x_n \to x$ dans $\mathbb{D}$. Démontrer que

$$\int_0^1 f(x_n(s))\mathrm{d}s \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x(s))\mathrm{d}s.$$

***

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $[0,1]$ et $p > 0$.

(1) On suppose que $\mathbb{E}[X_n] \to 1$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que pour tout $p > 0$, $\mathbb{E}[|X_n - 1|^p] \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

(2) On suppose que $\mathbb{E}[X_n] \to \alpha$ et $\mathbb{E}[X_n^2] \to \alpha^2$ avec $\alpha \in [0,1[$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que $\mathbb{E}[|X_n - \alpha|^p] \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Indication. Dans les deux cas, on pourra commencer par montrer que X_n converge en probabilité.

Corrigé :

Dans les deux cas, montrons d'abord que X_n converge en probabilité vers α (en posant $\alpha = 1$ dans la première question).

Cas (1) : on a

$$\mathbb{P}(|X_n - 1| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(1 - X_n \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}(1 - \mathbb{E}[X_n]) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cas (2) : on a

$$\mathbb{P}(|X_n - \alpha| > \varepsilon) = \mathbb{P}((X_n - \alpha)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}[(X_n-\alpha)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{E}[X_n^2] - 2\alpha\mathbb{E}[X_n] + \alpha^2}{\varepsilon^2} \to \frac{\alpha^2 - 2\alpha^2 + \alpha^2}{\varepsilon^2} = 0.$$

Pour conclure, on remarque que la suite $(\mathbb{E}[|X_n - \alpha|^p])_{n\geq 1}$ est bornée ; il suffit de montrer que 0 est sa seule valeur d'adhérence. Soit ϕ extraction telle que $(\mathbb{E}[|X_{\phi(n)} - \alpha|^p])_{n\geq 1}$ converge. Puisque X_n converge en probabilité vers α, il existe une extraction ψ telle que $X_{\phi\circ\psi(n)}$ converge presque sûrement vers 0. Par convergence dominée, $(\mathbb{E}[|X_{\phi\circ\psi(n)} - \alpha|^p])_{n\geq 1}$ converge vers 0, ce qui conclut.

Alternativement, on peut utiliser le théorème de super convergence dominée en remarquant que $|X_n - 1|^p$ est uniformément intégrable car bornée. □

***

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$, X des variables aléatoires réelles. Soit D un ensemble dénombrable dense de $\mathbb{R}$.

(1) Alix dit : « si X_n converge en loi vers X lorsque $n \to \infty$, alors pour tout $u \in D$ on a $\mathbb{P}(X_n \leq u) \to \mathbb{P}(X \leq u)$ lorsque $n \to \infty$. » A-t-il raison ? Justifiez votre réponse.

(2) Billie dit : « si pour tout $u \in D$ on a $\mathbb{P}(X_n \leq u) \to \mathbb{P}(X \leq u)$ lorsque $n \to \infty$, alors X_n converge en loi vers X lorsque $n \to \infty$. » A-t-elle raison ? Justifiez votre réponse.

Corrigé :

(1) Alix a tort. Par exemple si $D = \mathbb{Q}$, si $X_n = 1/n$ et $X = 0$, X_n converge en loi vers X, mais $\mathbb{P}(X_n \leq 0) \nrightarrow \mathbb{P}(X \leq 0)$ lorsque $n \to \infty$.

(2) Billie a raison.

Première solution. En notant E l'ensemble des fonctions de la forme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{]a_i,b_i]}$ avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $a_i, b_i \in D$ avec $a_i < b_i$, on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$ pour tout $f \in E$. Or par uniforme continuité, toute fonction continue à support compact est limite uniforme de fonctions dans E, ce qui montre que X_n converge en loi vers X d'après un résultat du premier cours.

Deuxième solution. Notons F et F_n les fonctions de répartition respectives de X et de X_n. Soit x un point de continuité de F. Par croissance, on a pour $u < x < v$ avec $u, v \in D$:

$$F(x) - F_n(v) \leq F(x) - F_n(x) \leq F(x) - F_n(u).$$

Ainsi, en faisant $n \to \infty$:

$$F(x) - F(v) \leq \liminf_{n\to\infty}(F(x) - F_n(x)) \leq \limsup_{n\to\infty}(F(x) - F_n(x)) \leq F(x) - F(u).$$

On conclut par continuité de F en x en faisant tendre u, v vers x.

□

***

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un couple de variables aléatoires $(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)$ à valeurs dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})^2$ tel que X_ε a la même loi que X, Y_ε a la même loi que Y et $\mathbb{P}(\|X_\varepsilon - Y_\varepsilon\|_\infty > \varepsilon) < \varepsilon$. Montrer que X et Y ont même loi.

Corrigé :

Première solution. L'hypothèse implique que $d_{LP}(X,Y) \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. En effet, pour un ensemble mesurable $\mathcal{A}$, on a

$$\mathbb{P}(X \in \mathcal{A}) \leq \mathbb{P}(X_\varepsilon \in \mathcal{A}, \|X_\varepsilon - Y_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon) + \mathbb{P}(\|X_\varepsilon - Y_\varepsilon\|_\infty > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(Y_\varepsilon \in \mathcal{A}^\varepsilon) + \varepsilon.$$

Il s'ensuit que $d_{LP}(X,Y) = 0$ et donc que X et Y ont même loi.

Deuxième solution. Il suffit de montrer que pour toute fonction $F : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ lipschitzienne bornée on a $\mathbb{E}[F(X)] = \mathbb{E}[F(Y)]$. Pour cela, en notant K la constante de lipschitziennité de F, on a pour tout $\varepsilon > 0$:

$$|\mathbb{E}[F(X)] - \mathbb{E}[F(Y)]| = |\mathbb{E}[F(X_\varepsilon) - F(Y_\varepsilon]| \leq \mathbb{E}[|F(X_\varepsilon) - F(Y_\varepsilon)|].$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}[F(X)] - \mathbb{E}[F(Y)]| &\leq \mathbb{E}[|F(X_\varepsilon) - F(Y_\varepsilon)|\mathbb{1}_{\|X_\varepsilon - Y_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon}] + \mathbb{E}[|F(X_\varepsilon) - F(Y_\varepsilon)|\mathbb{1}_{\|X_\varepsilon - Y_\varepsilon\|_\infty > \varepsilon}] \\
&\leq K\varepsilon + \|F\|_\infty \varepsilon,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

* * *

Petit problème 4. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme et $\mathbb{D}$ l'ensemble des fonctions càdlàg de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie de Skorokhod introduite en cours. Soit $(U_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. uniformes sur $[0,1]$. On pose pour $n \geq 1$ et $t \in [0,1]$:

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\mathrm{Card}(\{i \in \{1,2,\dots,n\} : U_i \leq t\}), \qquad B_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t).$$

L'objectif de ce problème est de montrer que B_n converge en loi dans $\mathbb{D}$ vers le pont brownien.

On dit qu'un vecteur aléatoire $(M_i)_{1\leq i\leq n}$ suit la loi multinomiale $\mathsf{M}(k, p_1, \dots, p_n)$ avec $k \geq 1$ et $0 \leq p_1, \dots, p_n \leq 1$ si

$$\mathbb{P}((M_1, \dots, M_n) = (m_1, \dots, m_n)) = \frac{k!}{\prod_{i=1}^n m_i!} \prod_{i=1}^k p_i^{m_i}$$

pour tous entiers positifs $m_1, \dots, m_n$ tels que $m_1 + \cdots + m_n = k$.

On pose, pour $1 \leq j \leq n$:

$$N_j = \mathrm{Card}(\{i \in \{1,2,\dots,n\} : U_i \in [(j-1)/n, j/n]\}).$$

(1) Démontrer que $(N_1, \dots, N_n)$ suit une loi multinomiale et identifier ses paramètres.

Soit $(P_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. de Poisson de paramètre 1. On pose pour $0 \leq k \leq n$:

$$S_k = \sum_{i=1}^k (P_i - 1)$$

et on définit S_t pour $t \geq 0$ par interpolation linéaire. Soient enfin $\widehat{B_n} \in \mathcal{C}$ la fonction obtenue en interpolant linéairement B_n aux points $\{k/n, 0 \leq k \leq n\}$ et $\widehat{S_n} \in \mathcal{C}$ une variable aléatoire dont la loi est la loi conditionnelle de $(\frac{1}{\sqrt{n}}S_{nt})_{0\leq t\leq 1}$ sachant que $S_n = 0$.

(2) Démontrer que $\widehat{B_n}$ et $\widehat{S_n}$ ont même loi.

(3) Justifier que $\widehat{B_n}$ converge en loi dans $\mathbb{D}$ vers le pont brownien.

(4) Démontrer que $\sup_{0\leq t\leq 1} |\widehat{B_n}(t) - B_n(t)| \to 0$ en probabilité.

(5) Conclure.

Corrigé :

(1) Pour des entiers positifs $m_1,\dots,m_n$ tels que $m_1+\cdots+m_n=n$ on a

$$\mathbb{P}\left((N_1,\dots,N_n)=(m_1,\dots,m_n)\right)=\binom{n}{m_1,\dots,m_n}\frac{1}{n^n}=\frac{n!}{\prod_{i=1}^n m_i!}\frac{1}{n^n}$$

de sorte que $(N_1,\dots,N_n)$ suit la loi multinomiale $\mathsf{M}(n,1/n,\dots,1/n)$.

(2) Il suffit de vérifier que $(\widehat{B}_n(0),\widehat{B}_n(1/n),\dots,\widehat{B}_n(n/n)$ et $(\widehat{S}_n(0),\widehat{S}_n(1/n),\dots,\widehat{S}_n(n/n))$ ont même loi. Remarquons que pour $0\le k\le n$ on a

$$\widehat{B}_n(k/n)=\sum_{i=1}^k(N_i-1),\qquad \widehat{S}_n(k/n)=\sum_{i=1}^k(P_i-1)\text{ sous }\mathbb{P}(\cdot|S_n=0).$$

Il suffit donc de vérifier que $(P_1,\dots,P_n)$ sous $\mathbb{P}(\cdot|S_n=0)$ suit la loi multinomiale $\mathsf{M}(n,1/n,\dots,1/n)$. Pour cela, remarquons que le support de la loi de ce vecteur est bien l'ensemble des entiers positifs $m_1,\dots,m_n$ tels que $m_1+\cdots+m_n=n$ en vertu du conditionnement. Ensuite, pour des entiers positifs $m_1,\dots,m_n$ tels que $m_1+\cdots+m_n=n$ on a

$$\mathbb{P}\left((P_1,\dots,P_n)=(m_1,\dots,m_n)|S_n=0\right)=\frac{1}{\mathbb{P}\left(S_n=0\right)}\prod_{i=1}^n e^{-1}\frac{1}{m_i!}.$$

Or S_n+n suit une loi de Poisson de paramètre n, de sorte que $\mathbb{P}\left(S_n=0\right)=e^{-n}\frac{n^n}{n!}$. Ainsi

$$\mathbb{P}\left((P_1-1,\dots,P_n-1)=(m_1,\dots,m_n)|S_n=0\right)=\frac{n!}{\prod_{i=1}^n m_i!}\frac{1}{n^n},$$

d'où le résultat.

(3) Puisque $\mathbb{E}[P_1-1]=0$ et $\mathsf{Var}(P_1-1)=1$, d'après le théorème de Donsker conditionné vu en cours $\widehat{S}_n$ converge en loi dans $\mathcal{C}$ vers le pont brownien. Comme $\widehat{B}_n$ et $\widehat{S}_n$ ont même loi, il en est de même de $\widehat{B}_n$. Ensuite, si $f_n,f\in\mathcal{C}$ sont telles que $f_n\to f$ dans $\mathcal{C}$, alors $f_n\to f$ dans $\mathbb{D}$ (prendre le changement de temps égal à l'identité). Autrement dit, l'inclusion de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ est continue. On conclut par stabilitité de la convergence en loi par composition par une fonction continue.

(4) *Première solution.* On commence par écrire

$$\sup_{0\le t\le 1}|\widehat{B}_n(t)-B_n(t)|\le\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{1\le k\le n}N_k.$$

En remarquant que les N_i suivent des lois $\mathsf{Bin}(n,1/n)$, on a alors pour tout $\varepsilon>0$:

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}N_k\ge\varepsilon\sqrt{n}\right)\le n\mathbb{P}\left(N_1\ge\varepsilon\sqrt{n}\right)\le n\mathbb{E}[e^{N_1}]e^{-\varepsilon\sqrt{n}}=n\left(1+\frac{e-1}{n}\right)^n e^{-\varepsilon\sqrt{n}}\sim ne^{e-1}e^{-\varepsilon\sqrt{n}}$$

qui converge vers 0 lorsque $n\to\infty$.

Deuxième solution. Si $\frac{i}{n} \leq t < \frac{i+1}{n}$ pour $0 \leq i \leq n-1$, on remarque que

$$B_n\left(\frac{i}{n}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq B_n(t) \leq B_n\left(\frac{i+1}{n}\right) + \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad B_n\left(\frac{i}{n}\right) \leq \widehat{B}_n(t) \leq B_n\left(\frac{i+1}{n}\right).$$

Comme $\widehat{B}_n(i/n) = B_n(i/n)$ pour $0 \leq i \leq n$ on en déduit que

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |\widehat{B}_n(t) - B_n(t)| \leq \max_{0 \leq i \leq n-1} \left| \widehat{B}_n\left(\frac{i+1}{n}\right) - \widehat{B}_n\left(\frac{i}{n}\right) \right| + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Or $\widehat{B}_n$ converge en loi dans $\mathcal{C}$ vers le pont brownien. Ainsi pour tout $\varepsilon, \eta > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour n assez grand

$$\mathbb{P}\left(\omega(\widehat{B}_n, \delta) > \eta\right) \leq \varepsilon.$$

On en déduit que pour $n > 1/\delta$ assez grand on a

$$\max_{0 \leq i \leq n-1} \left| \widehat{B}_n\left(\frac{i+1}{n}\right) - \widehat{B}_n\left(\frac{i}{n}\right) \right| < \eta$$

avec probabilité au moins $1 - \varepsilon$. Ceci conclut.

(5) Tout d'abord, en notant d_S la distance de Skorokhod

$$d_S(f, g) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \max(\|\lambda - \mathrm{Id}\|_\infty, \|f \circ \lambda - g\|_\infty)$$

avec Λ l'ensemble des changements de temps, vérifions que $d_S(\widehat{B}_n, B_n) \to 0$ en probabilité. D'après la question précédente et le théorème de représentation de Skorokhod, on peut supposer que $\|\widehat{B}_n - B_n\|_\infty \to 0$ presque sûrement. Alors en prenant le changement de temps égal à l'identité, on voit que presque sûrement $d_S(\widehat{B}_n, B_n) \to 0$, d'où le résultat.

Ainsi, $\widehat{B}_n$ converge en loi vers le pont brownien dans $\mathbb{D}$ et $d_S(\widehat{B}_n, B_n)$ converge en probabilité vers 0. On en déduit que B_n converge en loi vers le pont brownien.

Remarque. Ce problème est inspiré de l'article suivant :

Jean-François Marckert. "One more approach to the convergence of the empirical process to the Brownian bridge." Electronic Journal of Statistics, 2 118-126 2008
https://arxiv.org/pdf/0710.3296.pdf

***

□

Petit problème 5. Soit (E, d) un espace métrique **compact** muni de sa tribu borélienne. On note $\mathcal{M}_1(E)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur E. Pour $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ et $\varepsilon > 0$ on pose

$$I_\mu(\varepsilon) = \inf_{x \in E} \mu(\overline{B}(x, \varepsilon)),$$

où $\overline{B}(x, \varepsilon) = \{y \in E : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ désigne la boule fermée de rayon ε centrée en x.

Première partie.

(1) Calculer $\lim_{M \to \infty} I_\mu(M)$.

(2) Montrer que I_μ est càdlàg.

(3) Montrer que si pour tout $x \in E$ on a $\mu(\{x\}) = 0$, alors $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} I_\mu(\varepsilon) = 0$.

(4) Camille dit : « La réciproque de l'énoncé de la question (3) est aussi vraie. ». A-t-il raison ? Justifiez votre réponse.

Deuxième partie. Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}_1(E)$ et $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$.

(5) On suppose que μ_n converge étroitement vers μ. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\limsup_{n\to\infty} I_{\mu_n}(\varepsilon) \leq I_\mu(\varepsilon).$$

On dit qu'une mesure de probabilité sur E est *de support plein* si la masse qu'elle donne à tout ouvert est strictement positive.

(6) On suppose que μ_n converge étroitement vers μ. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(a) μ est de support plein ;

(b) $I_\mu(\varepsilon) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$;

(c) $\liminf_{n\to\infty} I_{\mu_n}(\varepsilon) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Troisième partie. On suppose dans la suite que $(M_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $(\mathcal{M}_1(E), d_{LP})$ et que M est une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathcal{M}_1(E), d_{LP})$.

(7) On suppose que M_n converge en loi vers M. Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) M est presque sûrement de support plein ;

(b) pour tous $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ il existe $\delta, N > 0$ tels que

$$\forall n \geq N, \quad \mathbb{P}\Big(I_{M_n}(\varepsilon) < \delta\Big) < \varepsilon'.$$

(8) Dominique dit : « M_n converge en loi vers M si et seulement si sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}_+^*$, I_{M_n} converge en loi vers I_M pour la topologie de Skorokhod. » A-t-elle raison ? Justifiez votre réponse.

Corrigé :

(1) Par compacité, E est borné. Il existe donc $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$ on a $\overline{B}(x, M) = E$. Ainsi $\lim_{M\to\infty} I_\mu(M) = 1$.

(2) Il est clair que I_μ est croissante, ce qui implique l'existence des limites à gauche. Pour démontrer la continuité à droite, raisonnons par l'absurde en supposant que I_μ n'est pas continue à droite en $\varepsilon_0 > 0$. Alors par croissance

$$I_\mu(\varepsilon_0) < \lim_{\varepsilon \downarrow \varepsilon_0} I_\mu(\varepsilon).$$

On peut donc trouver $x_0 \in E$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $n \geq 1$,

$$\mu(\overline{B}(x_0, \varepsilon_0))) + \delta < I_\mu(\varepsilon_0 + 1/n).$$

En particulier, pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mu(\overline{B}(x_0, \varepsilon_0)) + \delta < \mu(\overline{B}(x_0, \varepsilon_0 + 1/n)).$$

Comme $\mu(\overline{B}(x_0, \varepsilon_0 + 1/n)) \to \mu(\overline{B}(x_0, \varepsilon_0))$ lorsque $n \to \infty$, on obtient une contradiction.

(3) On raisonne par l'absurde. Supposons que $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in E$ mais que $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} I_\mu(\varepsilon) \neq 0$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que

$$\inf_{x \in E} \mu(\overline{B}(x, 1/n)) \geq \delta$$

pour tout $n \geq 1$. Soit $x_0 \in E$. Alors $\mu(\overline{B}(x_0, 1/n)) \geq \delta$ pour tout $n \geq 1$. En passant à la limite lorsque $n \to \infty$ on obtient $\mu(\{x_0\}) > 0$, absurde.

(4) Camille se trompe : par exemple, si $E = [0,1]$ et si λ désigne la mesure de Lebesgue, $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\lambda$ vérifie $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} I_\mu(\varepsilon) = 0$ mais $\mu(\{0\}) > 0$.

(5) Puisque E est séparable, la convergence étroite implique la convergence au sens de la distance de Lévy-Prokhorov. Soit $\eta > 0$. Pour n assez grand, $d_{LP}(\mu_n, \mu) < \eta$. Soit $x \in E$ tel que $\mu(\overline{B}(x, \varepsilon + \eta)) \leq I_\mu(\varepsilon + \eta) + \eta$. On a alors

$$I_{\mu_n}(\varepsilon) \leq \mu_n(\overline{B}(x, \varepsilon)) \leq \mu(\overline{B}(x, \varepsilon + \eta)) + \eta \leq I_\mu(\varepsilon + \eta) + 2\eta.$$

En notant $\eta_n = 2d_{LP}(\mu_n, \mu) \to 0$, on a alors $I_{\mu_n}(\varepsilon) \leq I_\mu(\varepsilon + \eta_n) + \eta_n$ et le résultat s'ensuit par continuité a droite de I_μ.

Autre manière de faire. D'après le théorème de porte-manteau, on a pour tout $x \in E$:

$$\limsup_{n \to \infty} \mu_n(\overline{B}(x, \varepsilon)) \leq \mu(\overline{B}(x, \varepsilon)).$$

Par ailleurs, comme $I_{\mu_n}(\varepsilon) \leq \mu_n(\overline{B}(x, \varepsilon))$, en prenant la limsup on en déduit que

$$\limsup_{n \to \infty} I_{\mu_n}(\varepsilon) \leq \limsup_{n \to \infty} \mu_n(\overline{B}(x, \varepsilon)) \leq \mu(\overline{B}(x, \varepsilon)).$$

On en déduit le résultat désiré en prenant l'inf sur $x \in E$.

(6) Montrons que (a) implique (b). Supposons (a) et raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\inf_{x \in E} \mu(\overline{B}(x, \varepsilon)) = 0.$$

Soit alors une suite (x_n) de E telle que $\mu(\overline{B}(x_n, \varepsilon)) \to 0$. Par compacité, quitte à extraire, on peut supposer que $x_n \to x$. Alors pour n assez grand pour que $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ on a

$$\overline{B}(x, \varepsilon/2) \subset \mu(\overline{B}(x_n, \varepsilon)).$$

Donc $\mu(\overline{B}(x, \varepsilon/2)) = 0$, de sorte que $I_\mu(\varepsilon/2) = 0$, absurde.

Le fait que (b) implique (a) s'obtient par contraposée : si μ n'est pas de support plein, il existe un ouvert O tel que $\mu(O) = 0$. En choisissant une boule fermée $\overline{B}(x, \varepsilon)$ incluse dans O on obtient alors $I_\mu(\varepsilon) = 0$.

L'équivalence entre (b) et (c) s'obtient en utilisant l'inégalité démontrée à la question (4), qui implique pour n assez grand, toujours en notant $\eta_n = 2d_{LP}(\mu_n, \mu) \to 0$:

$$I_{\mu_n}(\varepsilon) \leq I_\mu(\varepsilon + \eta_n) + \eta_n \leq I_{\mu_n}(\varepsilon + 2\eta_n) + 2\eta_n \leq I_{\mu_n}(2\varepsilon) + 2\eta_n.$$

Autre manière de faire pour (b) implique (c). Soit $\varepsilon > 0$. Par compacité, soient $x_1, \dots x_k \in E$ tels que

$$E = \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon).$$

D'après le théorème le théorème de porte-manteau, pour tout $1 \leq i \leq k$

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(\overline{B}(x_i, \varepsilon)) \geq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(B(x_i, \varepsilon/2)) \geq \mu(B(x_i, \varepsilon/2)) \geq I_\mu(\varepsilon/2) > 0.$$

On en déduit que

$$\liminf_{n\to\infty} \min_{1\leq i\leq k} \mu_n(\overline{B}(x_i, \varepsilon)) > 0.$$

Or pour tout $x \in E$, il existe $1 \leq i \leq k$ tel que $\overline{B}(x_i, \varepsilon) \subset \overline{B}(x, 2\varepsilon)$. Il s'ensuit que

$$I_{\mu_n}(2\varepsilon) \geq \min_{1\leq i\leq k} \mu_n(\overline{B}(x_i, \varepsilon))$$

et donc

$$\liminf_{n\to\infty} I_{\mu_n}(\varepsilon/2) > 0.$$

Autre manière de faire pour (c) implique (a). Soit O un ouvert de E. Soient $x \in E$ et $\varepsilon > 0$ tels que $B(x, \varepsilon) \subset O$. Alors d'après la question (5) on a

$$\mu(O) \geq \mu(B(x, \varepsilon)) \geq \mu(\overline{B}(x, \varepsilon/2)) \geq I_\mu(\varepsilon/2) \geq \limsup_{n\to\infty} I_{\mu_n}(\varepsilon/2) \geq \liminf_{n\to\infty} I_{\mu_n}(\varepsilon/2) > 0.$$

(7) Puisque E est séparable, $(\mathcal{M}_1(E), d_{LP})$ l'est également. On peut donc utiliser le théorème de représentation de Skorokhod et supposer que la convergence de M_n vers M a lieu presque sûrement dans $(\mathcal{M}_1(E), d_{LP})$.

Supposons (a). Fixons $\varepsilon, \varepsilon' > 0$. D'après (5), presque sûrement,

$$\liminf_{n\to\infty} I_{M_n}(\varepsilon) > 0.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}\Big(\exists \delta > 0, \exists N \geq 1, n \geq N \implies I_{M_n}(\varepsilon) \geq \delta\Big) = 1.$$

Par monotonie, il s'ensuit l'existence de $\delta > 0$ tel que

$$\mathbb{P}\Big(\exists N \geq 1, n \geq N \implies I_{M_n}(\varepsilon) \geq \delta\Big) \geq 1 - \varepsilon'.$$

Encore par monotonie, il s'ensuit l'existence de $N > 0$ tel que

$$\mathbb{P}\Big(I_{M_n}(\varepsilon) \geq \delta \text{ pour } n \geq N\Big) \geq 1 - 2\varepsilon'.$$

On en déduit que pour $n \geq N$ on a $\mathbb{P}\left(I_{M_n}(\varepsilon) \geq \delta\right) \geq 1 - 2\varepsilon'$.

Supposons maintenant (b). Par monotonie,

$$\mathbb{P}(M \text{ est de support plein}) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(I_M(1/k) > 0).$$

Soient $k \geq 1$ et $\varepsilon' > 0$ fixés. Soient $\delta, N > 0$ tels que

$$\forall n \geq N, \quad \mathbb{P}\left(I_{M_n}(1/k) < \delta\right) < \varepsilon'.$$

D'après (4), l'ensemble $\{\mu \in \mathcal{M}_1(E) : I_\mu(1/k) < \delta\}$ est ouvert dans $\mathcal{M}_1(E)$. Le théorème de porte-manteau implique que

$$\varepsilon' > \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(I_{M_n}(1/k) < \delta\right) \geq \mathbb{P}(I_M(1/k) < \delta).$$

Ainsi, on vient de démotrer que pour tous $k \geq 1$ et $\varepsilon' > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(I_M(1/k) = 0) \leq \mathbb{P}(I_M(1/k) < \delta) \leq \varepsilon'.$$

On en déduit que $\mathbb{P}(I_M(1/k) = 0)$ et le résultat désiré en découle.

(8) Non, les deux implications sont fausses. Donnons des contre exemples dans le cas déterministe. Si $E = [0,1]$, $\mu_{2n} = \delta_0$ et $\mu_{2n+1} = \delta_1$, la suite $(I_{\mu_n})_{n\geq 1}$ est constante mais $(\mu_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas en loi.

Si $E = [0,2]$ et

$$\mu_n = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_{1/2} + \frac{1}{3}\delta_{1/2+1/n},$$

on a

$$I_{\mu_n}(\varepsilon) = \begin{cases} 1/3 & \text{si } 0 < \varepsilon < 1/2 \\ 2/3 & \text{si } 1/2 \leq \varepsilon < 1/2 + 1/n \\ 3 & \text{si } 1/2 + 1/n \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Par ailleurs μ_n converge étroitement vers $\mu = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{2}{3}\delta_{1/2}$, et

$$I_\mu(\varepsilon) = \begin{cases} 1/3 & \text{si } 0 < \varepsilon < 1/2 \\ 1 & \text{si } 1/2 \leq \varepsilon \end{cases}$$

de sorte que I_{μ_n} ne converge pas au sens de Skorokhod vers I_μ (puisque I_μ ne prend jamais la valeur $2/3$: rappelons que la fusion de sauts macroscopiques n'est pas continue pour la topologie J_1 de Skorokhod).

Remarque. Ce problème est inspiré de l'article suivant :

Benedikt Stufler, Mass and radius of balls in Gromov-Hausdorff-Prokhorov convergent sequences, preprint disponible sur arxiv, arxiv :2201.12251 https://arxiv.org/abs/2201.12251

Il s'agit de pouvoir vérifier certaines propriétés d'une mesure limite (être de mesure pleine comme à la question (7) ou être sans atome) à partir d'estimées sur des mesures qui l'approchent (parfois plus simples à manipuler).

□

Fin